UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Anillo de Cobordismo $MU^*(pt)$

TESIS

para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemáticas

AUTOR

David Manuel Murrugarra Tomairo

ASESOR

Agripino García Armas

Lima – Perú

2005

De ♡ a Eugenia Victoria Tomairo Gerónimo, mi mamá.

AGRADECIMIENTO

Quisiera agradecer de manera muy especial al Doctor Agripino García Armas, asesor de esta tesis, por su amistad y costante apoyo durante la realización de este trabajo, cuyo entusiasmo me impulsa a perseverar en la búsqueda del conocimiento. Al Doctor Edgar Vera Saravia por su amistad, su rectitud y sus constantes sugerencias durante mi etapa de estudiante universitario, las cuales siempre los tengo presente.

A todos aquellos que de algún modo contribuyeron a mi formación académica ya sea impartiendo clases o compartiendo momentos de estudio. En esta parte debo mencionar a mis profesores de la facultad de Ciencias Matemáticas, Máximo Santiani, Renato Benasic, Yolanda Santiago, ... También debo decir que tuve la suerte de tener como amigos a un grupo de compañeros muy destacados y entusiasmados para estudiar matemáticas. Entre ellos mencionaré a Marco Mucha con quien compartí tantas horas de estudio y quien siempre estuvo para darme apoyo en momentos de confusión. A Moisés Guerra, con quien siempre conté para formar grupos de estudio y cuya amistad valoro mucho. A Arturo Saens, cuya destacada labor académica hizo que compartiéramos fructíferas horas de estudio. A todos aquellos con quienes participé en grupos de estudio y de quienes de algún modo aprendí muchas cosas, Napoleon Caro Tuesta, Arturo Fernandez, Maycol Falla, Bartleby Ordoñez, Wilman Rodas, ...

A todos mis amigos y amigas quienes siempre me dan aliento a continuar y seguir adelante. Entre ellos mencionaré a Carmen Giuliana García, Ana Huamaní, Victor Torres Ccaulla, Andres Torres Tucta,......

A todos los genios de la música, cuyas melodias me acompañan en mis horas de estudio. Debo agradecer a los Rolling Stones por hacer muy buena música.

A Fely que me inspira cada día a hacer las cosas del mejor modo.

A toda mi familia, quienes siempre estuvieron para apoyarme durante el desarrollo de mi carrera profesional. A mi mamá por haber sido una excelente madre. A mis abuelitas Luisa y Agripina, por todo lo que hicieron por mí, por ser tan buenas conmigo y por hacerme sentir tan especial. A Brez y Ninozka por su amistad y apoyo incondicional. A mis tías Juana y Justina. A mi tío Edilberto. A mi tío Victor. A mi prima Edith. A mis primos Katty y Edward, ...

Por último, a Dios por permitirme ser yo.

David Manuel Murrugarra Tomairo.

RESUMEN

Anillo de Cobordismo Complejo $MU^*(pto)$

David Manuel Murrugarra Tomairo
Mayo-2005.

. . . .

El objetivo principal de la presente tesis es estudiar la estructura del anillo de Cobordismo Complejo $MU^*(pt)$. Milnor y Novikov fueron los primeros en mostrar que este es un anillo polinomial sobre generadores de grado par sobre Z . Este cálculo se realiza utilizando la sucesión espectral de Adams sobre una teoría de homología generalizada. La exposición de este teorema ocupa la parte final de este trabajo.

En la primera parte se presenta el teorema de Adams sobre la convergencia de su sucesión espectral. En la segunda parte, se describe el espectro de Thom y la teoría de homología generalizada asociada a este espectro, que en este caso viene a ser el Cobordismo Complejo. También se describe de manera breve la estructura del Álgebra de Steenrod y su dual, que se utilizará al momento de calcular la estructura del anillo de homología $H_*(MU, Z_p)$.

Al final se adjunta un apéndice sobre álgebras y algebroides de Hopf, que incluye algunos isomorfismos de cambio de anillos.

PALABRAS CLAVES:

- ESPECTRO DE THOM
- SUCESIÓN ESPECTRAL DE ADAMS
- ÁLGEBRA DE STEENROD
- COBORDISMO COMPLEJO

ABSTRACT

Anillo de Cobordismo $MU^*(pt)$

David Manuel Murrugarra Tomairo
May-2005.

Adviser: Dr. Agripino García Armas.

Thesis for: Licenciado en Matemática.

The main objective of the present thesis is to study the structure of the Complex Cobordism Ring $MU^*(pt)$. Milnor y Novikov first accomplished this, and they(independently) showed that it is a polynomial ring over Z on generator of every even degree. It is achieved by using the Adams Spectral Sequence over a generalized theory. This theorem is expounded at the end of this work.

In the first part, I present the theorem about the convergence of the Adams spectral sequence. In the second, I describe the Thom Spectrum and the generalized homology theory associated to this spectrum, in this case it is the Complex Cobordism. I also describe quickly the Steenrod Algebra and its dual, which will be used when we determine the structure of singular homology ring $H_*(MU, Z_p)$.

Finally, I attach an appendix about Hopf algebroides and Hopf algebras, which contains some change of ring isomorphism.

KEY WORDS:

- THOM SPECTRUM
- ADAMS SPECTRAL SEQUENCE
- STEENROD'S ALGEBRA
- COMPLEX COBORDISM

Índice general

Introducción

El objetivo principal de la presente tesis es estudiar la estructura del anillo de Cobordismo Complejo $MU^*(pt)$. Milnor [10] y Novikov [12, 13], de manera independiente, fueron los primeros en mostrar que este es un anillo polinomial sobre generadores de grado par sobre Z, i.e., $MU^*(pt) = Z[x_1, x_2, \ldots]$ con $x_1 \,\epsilon\, \pi_{2n}(MU)$ (3.1.1)). Este cálculo se realiza utilizando la sucesión espectral de Adams sobre una teoría de homología generalizada.

En el primer capítulo se presenta la sucesión espectral de Adams sobre una teoría de homología generalizada. Se empieza presentando de manera breve el concepto de espectro. Por definición, un espectro E es una sucesión de espacios topológicos E_n con punto base, provistos de maps de estructura $\epsilon_n : SE_n \longrightarrow E_{n+1}$. Si X es un espacio y $E = \{E_n\}$ es un espectro, entonces $E \wedge X$ es también un espectro. Se define los grupos de homología generalizada como $H_n(X; E) = \pi_n(X \wedge E)$ y $H^n(X; E) = [X, E]_{-n} = \text{lím}_k [S^k X, E_{n+k}]$ como los grupos de cohomología generalizada de X, en el sentido que ellos satisfacen los axiomas de Eilenberg-Steenrod [5], excepto el axioma de dimensión.

En el segundo capítulo se presenta el espectro de Thom y la teoría de cohomología asociada a este espectro, que en este caso viene a ser la teoría de cobordismo complejo. También se describe de manera breve la estructura del Álgebra de Steenrod y su dual, que se utilizará al momento de calcular la estructura del anillo de homología $H_*(MU, Z_p)$.

En el tercer capítulo se presenta el resultado principal de este trabajo. El Cálculo del anillo de Cobordismo Complejo de un punto, que usualmente se denota por $MU^*(pt)$. Para realizar esto se utiliza la sucesión espectral del capítulo 1.

También se incluye un capítulo de comentarios. En este capítulo, como su nombre sugiere nos dedicaremos a dar algunos comentarios sobre el resultado principal del capítulo 3 (Teorema (3.1.1)), tratando de resaltar la importancia del mismo. Se enuncia algunos resultados y se indica la bibliografía correspondiente donde se puede encontrar una exposición de los mismos. No intento dar un desarrollo de estos temas, sólo se consideran en esta sección para enfatizar que el conocimiento de $MU^*(pt)$ es un primer paso para empezar el estudio de la teoría de Cobordismo Complejo.

Finalmente se incluye un apéndice de álgebras y algebroides de Hopf, en el que se dan algunos isomorfismos de cambio de anillos.

Capítulo 1

Sucesión Espectral

En este capítulo presentaremos la suceción espectral que utilizaremos más adelante para calcular $MU^*(pt) = \pi_*(MU)$. No se intenta dar un completo desarrollo de este tema, mas sólo hacer más claro los capítulos posteriores. Empezaremos introduciendo de manera breve el concepto de espectro en la primera sección. En la segunda se presenta las teorías de homología y cohomología generalizada asociada a un espectro. Finalmente la sucesión espectral de Adams sobre una teoría de cohomología generalizada.

1.1. Espectros

La noción de espectro fue introducida por E.L. Lima [6], aunque algunos autores afirman que J.W. Whitehead tuvo algo que ver con esto, pero que este último asumió una actitud muy modesta (ver Adams [1]).

Por definición, un espectro E es una sucesión de espacios topológicos E_n con punto base, provistos de maps de estructura

$$\epsilon_n : SE_n \longrightarrow E_{n+1}$$

donde SE_n denota la suspensión del espacio E_n.

Si E y E' son espectros, un map $f : E \longrightarrow E'$ es una sucesión de maps $f_n : E_n \longrightarrow {E'}_n$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} SE_n & \xrightarrow{\epsilon_n} & E_{n+1} \\ Sf_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ S{E'}_n & \xrightarrow{{\epsilon'}_n} & {E'}_{n+1} \end{array}$$

es conmutativo salvo homotopía. Dos maps $f,\ f'$ son homotópicos si y sólo si $f_n \simeq {f'}_n$, para cada n. Así existe una categoría cuyos objetos son espectros y cuyos morfismos son los maps entre espectros.

Ejemplo 1.1.1. *Sea S^n la n-esfera y $\sigma_n : SS^n \longrightarrow S^{n+1}$ el map identidad. Entonces $\boldsymbol{S} = \{S^n, \sigma_n\}$ es un espectro llamado el espectro de esferas.*

Ejemplo 1.1.2. *Sea E un espectro, X un espacio compacto. Sea ${E'}_{n+1} = E_n \wedge X$ y definimos ${\epsilon'}_n : S{E'}_n \longrightarrow {E'}_{n+1}$ como el map*

$$S{E'}_n = S \wedge {E'}_n = S \wedge E_n \wedge X \xrightarrow{\epsilon_n \wedge 1} E_{n+1} \wedge X = {E'}_{n+1}$$

Así $\{{E'}_n, {\epsilon'}_n\}$ es un espectro que será denotado por $E \wedge X$.

Ejemplo 1.1.3. *Sea E un espectro, X un espacio compacto. Sea ${E'}_{n+1} = X \wedge E_n$ y definimos ${\epsilon'}_n : S{E'}_n \longrightarrow {E'}_{n+1}$ como el map*

$$S{E'}_n = S \wedge X \wedge E_n \longrightarrow X \wedge S \wedge E_n \xrightarrow{1 \wedge \epsilon_n} X \wedge E_{n+1} = {E'}_{n+1}$$

donde el map $S \wedge X \wedge E_n \longrightarrow X \wedge S \wedge E_n$ intercambia el primer y el segundo factor. El espectro que resulta se denota por $X \wedge E$.

En particular, sea $SE = S \wedge E$; SE es llamado la suspensión de E.

Notar que los maps $x \wedge e \longrightarrow e \wedge x$ de $X \wedge E_n$ en $E_n \wedge X$, definen un map de $X \wedge E$ en $E \wedge X$.

Sea E un espectro y n un entero (no necesariamente ≥ 0). Sea $\epsilon_k : \pi_{n+k}(E_k) \longrightarrow \pi_{n+k+1}(E_{k+1})$ la compoción

$$\pi_{n+k}(E_k) \xrightarrow{S_*} \pi_{n+k+1}(SE_k) \xrightarrow{\epsilon_{k\sharp}} \pi_{n+k+1}(E_{k+1})$$

siempre que $n \geq -k$. Entonces los grupos $\pi_{n+k}(E_k)$ junto con los homomorfismos ϵ_k forman un sistema directo. Se define

$$\pi_n(E) = \varinjlim_{k} \pi_{n+k}(E_k)$$

Si $f : E \longrightarrow E'$ es un map de espectros, entonces los diagramas

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{n+k}(E_k) & \xrightarrow{S_*} & \pi_{n+k+1}(SE_k) & \xrightarrow{\epsilon_{k\sharp}} & \pi_{n+k+1}(E_{k+1}) \\
S_* \downarrow & & \downarrow (Sf_k)_\sharp & & \downarrow (f_{k+1})_\sharp \\
\pi_{n+k}({E'}_k) & \xrightarrow{S_*} & \pi_{n+k+1}(S{E'}_k) & \xrightarrow{{\epsilon'}_{k\sharp}} & \pi_{n+k+1}({E'}_{k+1})
\end{array}$$

son conmutativos, por tanto $f_{k\sharp}$ induce un homomorfismo $f_\sharp : \pi_n(E) \longrightarrow \pi_n(E')$.

Ejemplo 1.1.4. *$\pi_n(\boldsymbol{S})$ es el grupo de homotopía estable de dimensión n, donde $\boldsymbol{S}$ es el espectro de esferas del ejemplo 1.1.1.*

Considerando el espectro SE del ejemplo 3 y los grupos $\pi_{n+1}(SE)$ se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_{n+k}(E_k) & \xrightarrow{S_*} & \pi_{n+k+1}(SE_k) & \xrightarrow{\epsilon_{k\sharp}} & \pi_{n+k+1}(E_{k+1}) \\
S_* \downarrow & & & & S_* \\
\pi_{n+k+1}(SE_k) & \xrightarrow{S_*} & \pi_{n+k+2}(S^2E_k) & \xrightarrow{{\epsilon'}_{k\sharp}} & \pi_{n+k+2}(SE_{k+1})
\end{array}$$

que definen un homomorfismo $S_* : \pi_n(E) \longrightarrow \pi_{n+1}(SE)$. Se prueba que S_* es un isomorfismo(ver Whitehead [21]).

Un espectro E se dice que es un espectro de anillos, si existen maps $\mu : E \wedge E \longrightarrow E$ y $\eta : S \longrightarrow E$ tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{\mu\wedge 1} & E \wedge E \\ | & & | \\ \mu & & \mu \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \wedge E & \xrightarrow{\mu} & E \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S \wedge E & \xrightarrow{\eta\wedge 1} & E \wedge E \\ \| & & \downarrow \mu \\ E & \xrightarrow{1} & E \\ \| & & \uparrow \mu \\ E \wedge S & \xrightarrow{1\wedge\eta} & E \wedge E \end{array}$$

1.2. Teoría de Homología Generalizada

Si X es un espacio topológico y $E = \{E_n\}$ es un espectro, entonces como ya vimos $E \wedge X$ es también un espectro. Definimos los grupos de homología generalizada como

$$H_n(X; E) = \pi_n(X \wedge E)$$

y

$$H^n(X; E) = [X, E]_{-n} = \lim_k [S^k X, E_{n+k}]$$

como los grupos de cohomología generalizada de X, en el sentido que ellos satisfacen los axiomas de Eilenberg-Steenrod [5], excepto el axioma de dimensión. Ver Whitehead [21] para un desarrollo completo de estos temas.

En este sentido, a todo espectro E hay asociada una teoría de homología generalizada y de cohomología generalizada. Para hacer al mención al espectro se suele denotar $E_n(X)$ y $E^n(X)$ en vez de $H_n(X; E)$ y $H^n(X; E)$ respectivamente y se les refiere como E-homología y E-cohomología. Asi por ejemplo se tiene

$$E_n(X) = \pi_n(X \wedge E)$$

y

$$E_n(pto) = \pi_n(E)$$

Obs. 1.2.1. *Dado un espectro E, se puede definir la E-homología y la E-cohomología de otro espectro X como sigue*

(i) $E_n(X) = [S, E \wedge X]_n$

(ii) $E^n(X) = [X, E]_{-n}$

ver Adams [1] para los detalles.

Ahora sea E es un espectro de anillos. Sea $\mu : E \wedge E \longrightarrow E$ la multiplicación y consideremos el map

$$(E \wedge E) \wedge (E \wedge X) \xrightarrow{1\wedge\mu\wedge 1} (E \wedge E) \wedge X$$

Este map induce un isomorfismo

$$E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X) \longrightarrow \pi_*(E \wedge E \wedge X)$$

(Ver Adams[4] para los detalles). Ahora el map

$$E \wedge X = E \wedge S^0 \wedge X \longrightarrow E \wedge E \wedge X$$

induce, usando el isomorfismo anterior

$$\psi : E_*(X) \longrightarrow \pi_*(E \wedge E \wedge X) = E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X)$$

En particular, si X =E obtenemos

$$\Delta : E_*(E) \longrightarrow E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(E)$$

Así $E_*(E)$ es un coálgebra sobre $\pi_*(E)$ al igual que es un álgebra y $E_*(X)$ es un comódulo sobre $E_*(E)$. Uno quisiera decir que $E_*(E)$, al igual que el álgebra dual de Steenrod, es un álgebra de Hopf conmutativo, pero esto sería incorrecto puesto que se usa la estructura de bimódulo en el producto tensorial $E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(E)$ (i.e., el producto es con respecto a la estructura de módulo a derecha en el primer factor y a la estructura de módulo a izquierda en el segundo factor). Además del coproducto y de la estructura de álgebra, este tiene una unidad a derecha y una a izquierda $\eta_R, \eta_L : \pi_*(E) \longrightarrow E_*(E)$ correspondientes a las dos estructuras de módulos, una counidad $\epsilon : E_*(E) \longrightarrow \pi_*(E)$ inducida por $\mu : E \wedge E \longrightarrow E$ y una conjugación $c : E_*(E) \longrightarrow E * (E)$ inducido por el intercambio de factores en $E \wedge E$. Así se tiene que $(\pi_*(E), E_*(E))$ es un algebroide de Hopf (ver el apéndice al final).

1.3. Sucesión Espectral de Adams Sobre una Teoría de Homología Generalizada

Dado un espectro de anillos E, X y Y espectros tal que $E_*(X)$ es proyectivo sobre $\pi_*(E)$. Ahora si E satisface las propiedades enunciadas en (1.3.3) se tiene

TEOREMA 1.3.1 (Adams [1]). *Existe una sucesión espectral $\{E_r^{s\ t}, d_r\}$ tal que*

(a) $E_2^{p,*} = Ext^{p\ *}_{E_*(E)}(E_*(X), E_*(Y))$.

(b) $E_\infty^{s,t} = B^{s\ t}/B^{s+1\ t+1}$, *donde* $[X,Y]_n = B^{0\ n} \supset B^{1\ n+1} \supset B^{2\ n+2} \supset \cdots$ *es una filtración. La intersección* $\bigcap_s B^{s\ n+s}$ *de estos grupos es igual al subgrupo de* $[X,Y]_n$ *que consiste de elementos cuyo orden es finito y primo a* p. *Cada término*

E_{r+1} de la sucesión espectral es igual a la homología de E_r con respecto al operador diferencial

$$d_r : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+r,t+r-1}$$

y E_∞ es el límite inverso de los E_r cuando $r \to \infty$

Nota: En (a) *Ext* significa *Ext* de comódulos sobre el coálgebra $E_*(E)$. Las reglas de cálculo de este funtor se explican en el apéndice.

DEFINICIÓN 1.3.2. *La sucesión espectral de (1.3.1) es la sucesión espectral de Adams para X y Y sobre la E-homología.*

Propiedades que se asumen sobre E 1.3.3. *Ahora Vamos a enunciar las propiedades que asumiremos sobre E que nos permitirá definir Ext.*

(a) E es un espectro de anillos conmutativo y asociativo.

(b) E es conexo, i.e., $\pi_r(E) = 0$ para $r < 0$.

(c) El map $\mu_* : \pi_0(E) \otimes \pi_0(E) \longrightarrow \pi_0(E)$ inducido por la multiplicación $\mu : E \wedge E \longrightarrow E$ es un isomorfismo.

(d) E es flat, i.e., $E_*(E)$ es un módulo flat a izquierda sobre $\pi_*(E)$.

Capítulo 2

Teoría de Cobordismo

2.1. Espectro de Thom

Para todo $n \geq 0$ el grupo $U(n)$ de matrices complejo unitarias $n \times n$, tiene un haz $\gamma_n = (E_n, P_n, BU(n))$ que es universal en el sentido que cualquier $U(n)$-haz ξ sobre un espacio paracompacto es el pullback de γ_n inducido por una función $f : X \to BU(n)$. Describiremos $BU(n)$ de manera breve, con $G_k(C^n)$ denotaremos los Grassmannianos de dimensión k de C^n, es decir el conjunto de subespacios de dimensión k de C^n. Las inmersiones naturales

$$C^n \hookrightarrow C^{n+1} \hookrightarrow C^{n+2} \hookrightarrow \cdots$$

Inducen

$$G_k(C^n) \hookrightarrow G_k(C^{n+1}) \hookrightarrow G_k(C^{n+2}) \hookrightarrow \cdots$$

Así se definen

$$BU(k) = \lim_{\overrightarrow{n}} G_k(C^n) \quad \text{y} \quad C^\infty = \lim_{\overrightarrow{n}} C^n$$

Ahora se tiene las inmersiones naturales

$$BU(k) \hookrightarrow BU(k+1) \hookrightarrow BU(k+2) \hookrightarrow \cdots$$

Esta manera se define

$$BU = \lim_{\overrightarrow{k}} BU(k)$$

A $BU(n)$ se le denomina espacio clasificante. Clases de isomorfismo de $U(n)$-haces están en correspondencia 1-1 con las clases de homotopía de funciones de X a $BU(n)$.

(i) E_1 sobre $BU(1) = CP(\infty)$ es el haz de líneas canónico γ_1.

(ii) Si $i_n : BU(n) \hookrightarrow BU(n+1)$ denota el map inducido por la inclusión natural $U(n) \hookrightarrow U(n+1)$, entonces

$$i_n^*(\gamma_{n+1}) \cong \gamma_n \oplus 1_n$$

donde 1_n denota el haz de líneas trivial complejo.

(iii) Si $\rho_{k1} : BU(k) \times BU(1) \hookrightarrow BU(k+1)$ denota el map inducido por la inclusión natural $U(n) \times U(1) \hookrightarrow U(n+1)$, entonces

$$\rho_{k1}^*(\gamma_{k+1}) \cong \gamma_k \times 1$$

donde 1 denota el haz trivial complejo

Si $E \to X$ es un $U(n)$-haz (sobre un CW complejo), sea $D(E)$ el haz de discos asociado de vectores $e \,\epsilon\, E \,/\, \|e\| \leq 1$ (para alguna métrica Riemanniana) y $S(E)$ el haz de esferas asociado de vectores $e \,\epsilon\, E \,/\, \|e\| = 1$ en cada fibra. Utilizando la misma notación para los espacios totales de estos haces, se define el espacio de Thom de E por $D(E)/S(E)$.

Notación 2.1.1.

$$ME = \frac{D(E)}{S(E)}$$

Ejemplo 2.1.2. *Sea 1_n el haz vectorial trivial n-dimensional sobre un punto, entonces $M(1_n) = S^{2n}$.*

$$D(1_n) = D^{2n} = \{x \,\epsilon\, R^{2n} \,/\, \|x\| \leq 1\}$$

$$S(1_n) = S^{2n-1} = \{x \,\epsilon\, R^{2n} \,/\, \|x\| = 1\}$$

$$M(1_n) = \frac{D^{2n}}{S^{2n-1}} = S^{2n}$$

Obs. 2.1.3. $D^{2n} - S^{2n-1} = R^{2n} = S^{2n} - \{p\}$. *Entonces S^{2n} es la 1-compactificación de R^{2n}.*

Si $f : \xi \to \eta$ es una aplicacion de $U(n)$-haces, entonces $f(D(\xi)) \subset D(\eta)$ y $f(S(\xi)) \subset S(\eta)$, pues si $e \,\epsilon\, D(\xi)$, como $P_\xi^{-1}(e) \cong P_\eta^{-1}(F(e))$, entonces $\|\cdot\|_\xi$ induce una norma $|||\cdot|||_\xi$ sobre $P_\eta^{-1}(f(e))$ ($|||f(e)|||_\xi = \|e\|_\xi$). Pero $|||\cdot|||_\xi$ y $\|\cdot\|_\eta$ son equivalentes, entonces $f(e) \,\epsilon\, D(\eta)$.
Del mismo modo se tiene: Si $e \,\epsilon\, S(\xi) \;\Rightarrow\; f(e) \,\epsilon\, S(\eta)$.
Luego f induce una aplicación:

$$M(f) : M(\xi) \to M(\eta)$$

Más aún si se tiene $\varphi \xrightarrow{f} \xi \xrightarrow{g} \eta$, entonces $M(f \circ g) = M(f) \circ M(g)$ y si $Id : \xi \to \xi \;\Rightarrow\; M(Id) = Id_{M(\xi)}$.
Así se tiene el siguiente:

TEOREMA 2.1.4. *Existe un funtor covariante M de la categoría de $U(n)$-haces y aplicaciones de $U(n)$-haces a la categoría de espacios topológicos y funciones continuas, el cual asigna a cada $U(n)$-haz ξ, el espacio de Thom $M(\xi)$ y a cada $f : \xi \longrightarrow \eta$, $M(f)$.*

TEOREMA 2.1.5. *Si ξ es un $U(n)$-haz y η es un $U(m)$-haz, entonces $\xi \times \eta$ puede ser considerado como un $U(m+n)$-haz y se tiene*

$$M(\xi) \wedge M(\eta) \cong M(\xi \times \eta)$$

COROLARIO 2.1.6. $M(\xi \times 1_n) = M(\xi) \wedge S^{2n} = \Sigma^{2n} M(\xi)$

Ahora vamos a describir el espectro de Thom, para el caso complejo, que lo denotaremos por MU, i.e.,

$$MU = \{MU(n), \epsilon_n\}$$

donde $MU(n)$ y ϵ_n de describen del siguiente modo:

$$\begin{array}{lcl} MU(2n) & = & M(\gamma_n) \\ MU(2n+1) & = & \Sigma M(\gamma_n) \end{array}$$

De (iii) se tiene que existe una aplicación de $M(\gamma_n \times 1) = M(\gamma_n) \wedge S^2$ a $M(\gamma_{n+1})$, la que se denotará por $\widetilde{\epsilon}_n$. Asi se tiene:

$$\widetilde{\epsilon}_n : \Sigma^2 MU(n) \hookrightarrow MU(n+1)$$

que puede ser considerado como una inclusión.

Ahora definimos $\epsilon_r : \Sigma MU(r) \longrightarrow MU(r+1)$ por

$$\begin{cases} r = 2n & \Longrightarrow \quad \epsilon_r = Identidad \\ r = 2n+1 & \Longrightarrow \quad \epsilon_r = \widetilde{\epsilon}_r \end{cases}$$

De este modo se tiene el espectro de Thom MU. Asociado a este espectro tenemos un funtor de cohomología como en G.W.Whitehead, "Generalized homology theories", Trans. Amer. Math. Soc. 102(1962), pp 227-283. Los grupos de este funtor de cohomología se escriben $MU^q(X)$ y son llamados grupos de cobordismo complejo.

En general vamos a suponer que este funtor de cohomología está definido en alguna categoría de espectros o de objetos estables. Esta supocición puede ser facilmente cambiada si se desea, al costo de hacer las pruebas más complicadas.

En seguida quisiéramos discutir los productos cup en esta teoría de cohomología. Por tanto vamos a introducir el map producto

$$\mu : MU \wedge MU \longrightarrow MU$$

Donde "$\wedge$" representa el producto smash y asumimos que $MU \wedge MU$ puede ser formado en nuestra categoría estable.

Además se asume que $MU \wedge MU$ tiene esqueletos $(MU \wedge MU)^q$, en un sentido adecuado , de tal manera que se tenga la sucesión exacta corta

$$0 \to \lim_q{}^1[S(MU\wedge MU)^q, MU] \to [MU\wedge MU, MU] \to \lim_q{}^0[(MU\wedge MU)^q, MU] \to 0$$

donde $\lim^0$ representa el límite inverso, $\lim^1$ representa el primer funtor derivado del límite inverso y $[X, Y]$ representa el grupo de clases de homotopía estable de maps X a Y en nuestra categoría estable. En esta sucesión exacta, el grupo $\lim_q{}^1[S(MU \wedge MU)^q, MU]$ es cero.(Esto se sigue de que $H_r(MU \wedge MU) = 0$ para r impar y $\pi_r(MU) = 0$ para r impar—será visto más adelante. Así la sucesión espectral

$$H^*(MU \wedge MU, \pi_*(MU)) \Longrightarrow [MU \wedge MU, MU]$$

tiene todo sus diferenciales cero). Por tanto será suficiente mostrar un elemento de $\lim_q{}^0[(MU \wedge MU)^q, MU]$.

Ahora tenemos el map

$$BU(n) \times BU(m) \longrightarrow BU(n + m)$$

(el map clasificante para la suma de Whitney de los haces universales sobre $BU(n)$ y $BU(m)$). De este map se induce un map

$$\mu_{n,m} : MU(n) \wedge MU(m) \longrightarrow MU(n + m)$$

Los maps $\mu_{n,m}$ nos dan un elemento en $\lim_q{}^0[(MU\wedge MU)^q, MU]$ y por tanto ellos están en una única clase de homotopía de maps

$$\mu : MU \wedge MU \longrightarrow MU$$

El map μ es conmutativo y asociativo, salvo homotopía. En otras palabras tenemos el siguiente resultado

TEOREMA 2.1.7. *El espectro de Thom MU, tiene una estructura canónica de espectro de anillo.*

Teniendo definido el map $\mu : MU \wedge MU \longrightarrow MU$, vamos a poder dotar a $H_*(MU)$ de un producto

$$\mu_* : H_*(MU) \otimes H_*(MU) \longrightarrow H_*(MU) \qquad (2.1.1)$$

Más aún, en la siguiente sección veremos que $H_*(MU)$ adquiere una estructura de álgebra (ver 2.2.2)

2.2. Homología de BU, $H_*(BU)$

Empezaremos describiendo la homología de BU, donde $BU = \lim_{\rightarrow} BU(n)$. El map de la suma de Whitney $BU(n) \times BU(m) \longrightarrow BU(n+m)$ dota a $H_*(BU)$ de una estructura de álgebra. De manera más precisa se tiene el siguiente

LEMA 2.2.1. *$H_*(BU) = Z[a_1, a_2, \ldots]$, donde $a_i \in H_{2n}$.*

Ahora vamos a describir $H_*(MU)$ que es definido como

$$H_{2n}(MU) = \lim_{n\to\infty} H_{2n+2i}(MU(n))$$

El isomorfismo de Thom

$$\varphi : H_q(BU(n)) \longrightarrow H_{q+2n}(MU(n))$$

pasando a límites directos nos da el isomorfismo

$$\varphi : H_*(BU) \longrightarrow H_*(MU)$$

que conmuta con los productos (ver la ecuación 2.1.1). Así se tiene el siguiente

TEOREMA 2.2.2. *$H_*(MU) = Z[b_1, b_2, \ldots]$, donde $b_i \in H_{2n}$.*

2.3. Cálculo de $H_*(MU, Z_p)$

Empezaremos describiendo el Álgebra de Steenrod A^* y su dual A_*. Si $H/(p)$ denota el *mod* (p) espectro de Eilenberg-Maclane para algún número primo p. Entonces $A^* = H^*(H/(p))$ es el *mod* (p) Álgebra de Steenrod, el álgebra de las operaciones cohomológicas estables en cohomología ordinaria con coeficientes en Z_p.

De manera más precisa , A^* es generado por las operaciones de Steenrod,

(i) Si $p = 2$, estas son los cuadrados de Steenrod

$$Sq^i : H^n(X, Y, Z_2) \longrightarrow H^{n+1}(X, Y, Z_2)$$

(ii) Si $p > 2$, estas son las Potencias de Steenrod

$$P^k : H^n(X, Y, Z_p) \longrightarrow H^{n+2k(p-1)}(X, Y, Z_p)$$

junto con el operador frontera de Bockstein

$$Q_0 : H^n(X, Y, Z_p) \longrightarrow H^{n+1}(X, Y, Z_p),$$

asociado a la sucesión de coeficientes

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow Z_{p^2} \longrightarrow Z_p \longrightarrow 0$$

Tenemos las siguientes propiedades de estas operaciones cohomológicas:

(a) Cuando $p > 2$, $P^k \epsilon A^{2k(p-1)}$ y cuando $p = 2$, $Sq^k \epsilon A^k$. Además estos son tales que (en el caso $p = 2$, Sq^k también será denotado por P^k y su grado será $k/2$)

   (i) $P^0 = Id$

   (ii) $P^k(\alpha) = \begin{cases} \alpha^p & Si\ deg\ \alpha = 2k \\ 0 & Si\ deg\ \alpha < 2k \end{cases}$

   (iii) $P^k(\alpha\beta) = \sum_{k=m+n} P^m(\alpha)P^n(\beta)$ (Fórmula de Cartan)

(b) En ambos casos ($p = 2$ y $p > 2$), $Q_0 \epsilon A^1$ y es tal que

   (i) $Q_0^2 = 0$

   (ii) $Q_0(\alpha\beta) = Q_0(\alpha)\beta + (-1)^{deg\ \alpha}Q_0(\beta)$,
   i.e., Q_0 es una derivación.

   (iii) En el caso $p = 2$, $Q_0 = Sq^1$.

En ambos casos, A^* tiene una base aditiva formada por ciertos monomios (llamados admisibles) en las operaciones dadas. Así A^* es un álgebra de Hopf conexo de tipo finito sobre Z_p, cuyo map diagonal está dado por:

$$\Delta(P^k) = \sum_{k=m+n} P^m \otimes P^n$$

y

$$\Delta(Q_0) = Q_0 \otimes 1 + 1 \otimes Q_0.$$

Si $A_* = H_*(H/(p))$ denota el álgebra de Hopf dual. Milnor describe la estructura de este álgebra dual en el siguiente teorema. La prueba de este teorema se puede encontrar en Milnor [9] o en Steenrod and Spstein [19]. De aquí en adelante $Z_p[x]$ denotará el álgebra polinomial sobre Z_p en uno o más generadores x, E[x] denotará el álgebra exterior sobre los mismos. Para las definiciones de álgebra polinomial y de álgebra exterior ver Cartan and Eilenberg [2] (Pg. 146) o Spanier [18](Pg. 264).

TEOREMA 2.3.1 (Milnor [9]). *A_* es un álgebra de Hopf graduado, conmutativo y no coconmutativo.*

(a) Para p=2, como un álgebra $A_* = Z_2[\xi_1, \xi_2, \ldots]$, donde $|\xi_n| = 2^n - 1$. El coproducto $\Delta : A_* \longrightarrow A_* \otimes A_*$ es dado por $\Delta\xi_n = \sum_{0 \leq i \leq n} \xi_{n-i}^{2^n} \otimes \xi_i$, donde $\xi_0 = 1$.

(b) Para $p > 0$, como un álgebra $A_* = Z_p[\xi_1, \xi_2, \ldots] \otimes E[\tau_1, \tau_2, \ldots]$, donde $|\xi_n| = 2(p^n - 1)$ y $|\tau_n| = 2p^n - 1$. El coproducto $\Delta : A_* \longrightarrow A_* \otimes A_*$ es dado por $\Delta\xi_n = \sum_{0 \leq i \leq n} \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \xi_i$, donde $\xi_0 = 1$ y $\Delta\tau_n = \tau_n \otimes 1 + \sum_{0 \leq i \leq n} \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \tau_i$.

(c) *Para cada primo p, existe una unidad* $\eta : Z_p \longrightarrow A_*$, *una counidad* $\varepsilon : A_* \longrightarrow Z_p$ *(los cuales son isomorfismos en dimensión cero), y una conjugación* $c : A_* \longrightarrow A_*$ *que es un map de álgebras dado recursivamente por* $c(\xi_0) = 1$, $\sum_{0\leq i\leq n} \xi_{n-i}^{p^i} c(\xi_i) = 0$ *para* $n > 0$ *y* $\tau_n + \sum_{0\leq i\leq n} \xi_{n-i}^{p^i} c(\tau_i) = 0$ *para* $n \geq 0$. $\bar{A}_*$ *denotará el* $ker\varepsilon$, *i.e.,* $\bar{A}_*$ *es isomorfo a* A_* *en dimensiones positivas y es trivial en dimensión cero.*

Para el caso $p = 2$, "dualizando"se obtiene la base de Milnor $\{Sq^R\}_R$ para A^*, donde Sq^R es el dual para $\xi^R = \xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\cdots$, donde $R = (r_1, r_2, \ldots)$ es una sucesión de enteros no negativos que casi todos son ceros y Sq^R tiene grado $|R| = \sum_i r_i(2^i - 1)$. Así se tiene

$$\Delta(Sq^R) = \sum_{R_1+R_2=R} Sq_1^R \otimes Sq_2^R$$

Para el caso $p > 2$, si hacemos $\tau^E = \tau_0^{e_0}\tau_1^{e_1}\cdots$ ($e_i = 0$ ó 1) y $\xi^R = \xi_1^{r_1}\xi_2^{r_2}\cdots$ como antes, entonces los elementos $\{\tau^E\xi^R\}_{E,R}$ forman una base aditiva para A_*. Dualizando obtenemos la base de Milnor para A^*, en particular, definimos las operaciones de Milnor P^R como el dual de ξ^R y definimos Q_k como el dual de τ_k (también vale para $k = 0$). Así, salvo por un signo, la base de Milnor está dada por los elementos $Q^E P^R$, donde $Q^E = Q_0^{e_0}Q_1^{e_1}\cdots$ ($e_i = 0$ ó 1). Es claro que $P^R \epsilon A^{2|R|}$, donde $|R| = \sum_1 r_i(p^i - 1)$ y $Q_k \epsilon A^{2p^k-1}$.

El map diagonal está dado por

$$\Delta(P^R) = \sum_{R_1+R_2=R} P_1^R \otimes P_2^R$$

$$\Delta(Q_k) = Q_k \otimes 1 + 1 \otimes Q_k.$$

Si X es un espacio tal que $H_*(X, Z_p)$ es finito dimensional en cada grado. Entonces $H^*(X, Z_p)$ es un A^*-módulo. La acción está dada por un map

$$A^* \otimes H^*(X, Z_p) \longrightarrow H^*(X, Z_p)$$

El dual de este map es una co-acción

$$H_*(X, Z_p) \longrightarrow A_* \otimes H_*(X, Z_p)$$

Así $H_*(X, Z_p)$ llega a ser un comódulo sobre el coálgebra A_*. La suposición de que $H_*(X, Z_p)$ es localmente finito dimensional es innecesaria, puesto que el map de co-acción se puede definir directamente, como lo haremos más adelante. Las siguientes relaciones serán de mucha utilidad para ello.

Para el caso $p = 2$,

$$Sq^R(w_1) = \sum_r < Sq^R, \xi_r > w_1^{2^r} \qquad (2.3.1)$$

donde $w_1 \epsilon H^1(RP^\infty, Z_2)$ es un generador. Notar que $Sq^{(k,0,\dots)} = Sq^k$.
Y si $p > 2$

$$P^R(x) = \sum_r < P^R, \xi_r > x^{p^r} \quad \text{si } deg\ x = 2. \tag{2.3.2}$$

También tenemos $P^{(k,0,\dots)} = P^k$.

Ahora si p es cualquier número primo, denotaremos por (Q_0) al ideal de A^* generado por el operador de coborde de Bockstein $Q_0 \epsilon A^1$. Entonces los elementos P^R forman una base sobre Z_p para el álgebra de Hopf conexo $A^*/(Q_0)$ donde $P^R = Sq^{2R}$ para el caso $p = 2$. El Álgebra de Hopf dual $(A^*/(Q_0))_*$ está dado por el anulador de (Q_0), así

$$(A^*/(Q_0))_* \cong Z_p[\xi_1, \xi_2, \cdots] \quad \text{cuando } p > 2$$

y

$$(A^*/(Q_0))_* \cong Z_2[\xi_1^2, \xi_2^2, \cdots] \quad \text{cuando } p = 2$$

Ahora regresando a cobordismo, estudiaremos la clase reducida de Thom

$$\mu : MU \longrightarrow H/(p)$$

i.e., es decir el generador de $H^0(MU, Z_p)$. Este map es la counidad del comódulo conexo $H^*(MU, Z_p)$. Más aún el map

$$\mu_* : H_*(MU, Z_p) \longrightarrow A_*$$

es multiplicativo. Haremos más explícito este homomorfismo en el siguiente

LEMA 2.3.2. *El homomorfismo $\mu_* : H_*(MU, Z_p) \longrightarrow A_*$, para p impar, es dado por*

$$\mu_*(b_k) = \begin{cases} \xi_r & si\ k = p^r - 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

y para $p = 2$, por

$$\mu_*(b_k) = \begin{cases} \xi_r^2 & si\ k = 2^r - 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Prueba: Para $p > 2$, tenemos la base de base Milnor $\{Q^E P^R\}_{E,R}$ para A_*. Los generadores $b_k \epsilon H_{2k}(MU, Z_p)$ son inducidos de $MU(1)$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_{2k+2}(MU(1), Z_p) \arrow[r, "u_{1*}"] \arrow[dr, "v_{1*}"'] & H_{2k}(MU, Z_p) \arrow[d, "u_{p*}"] \\ & A_{2k} \end{tikzcd}$$

conmuta. Aqui $v_1 : MU(1) \to S^2K(Z_p)$ es la clase de Thom. Por tanto $u_{p*}(b_k) = v_{1*}(b_k)$. De la ecuación (2.3.2) se tiene

$$P^R(v_1) = \sum_r < P^R, \xi_r > v_1^{p^r},$$

Esto nos da

$$\begin{aligned} < P^R, up*(b_k) > &= < P^R, v_{1*}(b_k) > \\ &= < P^R(v_1), b_k > \\ &= \textstyle\sum_r < P^R, \xi_r >< v_1^{p^r}, b_k > \\ &= \begin{cases} < P^R, \xi_r > & \text{si } k = p^r - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \end{aligned}$$

Puesto que Q_k tiene grado impar, Q^E aniquila $H^*(MU(1), Z_p)$ y $< Q^E P^R, u_{p*} >= 0$ si $E \neq 0$. Esto prueba el teorema para el caso $p > 2$.

Para el caso $p = 2$ se procede de manera similar, utilizando (2.3.1). ■

En otras palabras el lema 2.3.2 nos dice que la imagen de μ_* en A_* es $Z[\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots]$ para $p = 2$ y $Z[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ para $p > 2$

TEOREMA 2.3.3. *La estructura de comódulo*

$$\psi : H_*(MU, Z_p) \longrightarrow A_* \otimes H_*(MU, Z_p)$$

para p impar, está dada por

$$\psi(b_k) = \sum_m \sum_{p^{r_1}+\cdots+p^{r_{m+1}}=k+1} \xi_{r_1}\xi_{r_2}\cdots\xi_{r_{m+1}} \otimes b_m$$

Por ejemplo

$$\psi(b_{p^r-1}) = \xi_r \otimes 1 + \xi_{f-1}^p \otimes b_{r-1} + \cdots + 1 \otimes b_{p^r-1}$$

Y para $p = 2$ está dada por

$$\psi(b_k) = \sum_m \sum_{2^{r_1}+\cdots+2^{r_{m+1}}=k+1} \xi_{r_1}^2\xi_{r_2}^2\cdots\xi_{r_{m+1}}^2 \otimes b_m$$

Prueba: Usamos otra vez el hecho de que $b_k \,\epsilon\, H_{2k}(MU, Z_p)$ es inducido de $MU(1)$ y conocemos la acción de A^* sobre $H^*(MU, Z_p)$:

$$P^R(v_1^{m+1}) = \sum < P^R, \xi_{r_1}\xi r_2 \cdots \xi_{r_{m+1}} > v_1^{p^{r_1}+\cdots+p^{r_{m+1}}}$$

para p impar, y para $p = 2$

$$Sq^R(v_1^{m+1}) = \sum < Sq^R, \xi_{r_1}^2\xi_{r_2}^2 \cdots \xi_{r_{m+1}}^2 > v_1^{2^{r_1}+\cdots+2^{r_{m+1}}}$$

De esto se tiene el teorema. ■

LEMA 2.3.4. *Sea M un A_*-comódulo a izquierda, el cual no es trivial sólo en dimensiones pares. Entonces M es un comódulo sobre $P_* \subset A_*$ que es definido como sigue. Para $p > 2$, $P_* = Z_p[\xi_1, \xi_2, \ldots]$ y para $p = 2$, $P_* = Z_p[\xi_1^2, \xi_2^2, \ldots]$.*

Prueba: Para $m \epsilon M$, sea $\psi(m) = \sum m' \otimes m''$. Entonces cada $m' \epsilon A_s$ debe tener dimensión par y por coasociatividad su producto sólo debe contener factores de dimensión par. Lo que significa que este debe estar en P_*. ∎

TEOREMA 2.3.5. *Como A_*-comódulo a izquierda, $H_*(MU) = P_* \otimes C$, donde $C = Z_p[u_1, u_2, \ldots]$ con dim $u_i = 2i$ e i es cualquier entero positivo no de la forma $p^k - 1$.*

Prueba: Tenemos el map $u_* : H_*(MU, Z_p) \longrightarrow A_*$ que es un map de A_*-comódulos multiplicativo cuya imagen es P_*. Sea la proyección natural $q : H_*(MU, Z_p) \longrightarrow C$, i.e.

$$q(b_k) = \begin{cases} u_k & \text{si } k \neq p^r - 1 \\ 0 & \text{si } k = p^r - 1, \ r > 0 \end{cases}$$

Ahora definimos un map de P_*-comódulo álgebras

$$f : H_*(MU, Z_p) \longrightarrow P_* \otimes C$$

por

$$f(b_k) = \sum_m \sum_{p^{r_1} + \cdots + p^{r_{m+1}} = k+1} \xi_{r_1} \xi_{r_2} \cdots \xi_{r_{m+1}} \otimes q(b_m)$$

i.e., $f = (1 \otimes q)\psi$. Ahora, f así definido es un isomorfismo. Para probar esto, notar que es suficiente mostrar que f es suryectivo, desde que este es un map de módulos de tipo finito sobre Z_p que preserva dimensión en cada grado (esto se tiene de 2.3.2). De 2.3.3 tenemos

(i) Si $m \neq p^r - 1$, entonces

$$f(b_m) = 1 \otimes q(b_m) + \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{p^{r_1} + \cdots + p^{r_{m+1}} = k+1} \xi_{r_1} \xi_{r_2} \cdots \xi_{r_{m+1}} \otimes q(b_t)$$

y

(ii) $f(b_{p^r - 1}) = \xi_r \otimes 1 + \sum_{t=0}^{p^r - 2} \sum_{p^{r_1} + \cdots + p^{r_{m+1}} = k+1} \xi_{r_1} \xi_{r_2} \cdots \xi_{r_{m+1}} \otimes q(b_t)$

Ahora el map

$$Q(f) : Q(H_*(MU, Z_p)) \longrightarrow Q(P_* \otimes C)$$

está dado por

$$Q(f)(b_k) = \begin{cases} 1 \otimes u_k \ mod\ I^2 & (k \neq p^r - 1) \\ \xi_r \otimes 1 \ mod\ I^2 & (k = p^r - 1) \end{cases}$$

Así $Q(f)$ es un isomorfismo, por tanto f un epimorfismo.

■

Obs. 2.3.6. *Otra manera de probar este teorema es la siguiente.* $H_*(MU, Z/(p))$ *es un* P_**-comódulo álgebra por (2.2.2) y (2.3.4). Por (2.3.2) existe un map de este sobre* P_**, así or (A.1.19) este debe ser igual a* $P_* \otimes C$*, donde* $C = Z/(p) \ \square_{P_*} \ H_*(MU)$.

Capítulo 3

Resultado Principal

3.1. Estructura de $MU^*(pt)$

En este capítulo utilizaremos la sucesión espectral de Adams que se describe en el capítulo 1, para calcular $MU^*(pt) = \pi_*(MU)$ (Teorema 3.1.1). Milnor [10] y Novikov [12, 13](de manera independiente) fueron los primeros en realizar este cálculo.

TEOREMA 3.1.1. $\pi_*(MU) = Z[x_1, x_2, \ldots]$ *con* $x_1 \in \pi_{2n}(MU)$

Probaremos este teorema esencialmente del mismo modo en que lo hicieron Milnor y Novikov. Se hará uso de los isomorfismos de cambio de anillos (A.1.19) y (A.3.10) para calcular el E_2-término de la sucesión espectral (3.1.4). De esto se tendrá de manera inmediata que la sucesión espectral converge, i.e., que este no tiene diferenciales no triviales.

De acuerdo con el capítulo 1 tenemos la sucesión espectral

$$Ext^{s\ t}_{A_*}(Z_p, H_*(MU, Z_p)) \overset{s}{\Rightarrow} \pi_{s-t}(MU) \tag{3.1.1}$$

LEMA 3.1.2. *Sea M un comódulo álgebra sobre A_*. Si este de la forma $P_* \otimes N$ (P_* es el mismo de 2.3.4) para algún A_*-comódulo álgebra N, entonces*

$$Ext_{A_*}(Z_p, M) = Ext_E(Z_p, N)$$

donde

$$E = A_* \otimes_{P_*} Z_p = \begin{cases} E[\xi_1, \xi_2, \ldots] & para\ p = 2 \\ E[\tau_1, \tau_2, \ldots] & para\ p > 0 \end{cases}$$

En particular

$$Ext_{A_*}(Z_p, H_*(MU)) = Ext_E(Z_p, Z_p) \otimes C$$

Prueba: Para el último resultado, por (2.3.5) se tiene que

$$H_*(MU) = P_* \otimes C.$$

Entonces

$$Ext_{A_*}(Z_p, H_*(MU)) = Ext_E(Z_p, C) = Ext_E(Z_p, Z_p) \otimes C$$

Y para lo anterior afirmamos que $M = A_* \,\square_E\, N$. Tenemos $A_* = P_* \otimes E$ como espacios vectoriales y por tanto como E-comódulos por (A.1.21), así

$$A_* \,\square_E\, N = P_* \otimes E \,\square_E\, N = P_* \otimes N = M$$

y el resultado se tiene de (A.3.10). ■

Por tanto hemos reducido el problema de calcular el E_2-término de Adams para MU al cálculo de $Ext_E(Z_p, Z_p)$, el cual es relativamente fácil; puesto que E es el dual de un álgebra exterior de tipo finito.

LEMA 3.1.3.

$$Ext_E(Z_p, Z_p) = Z_p[y_1, y_2, \ldots]$$

donde $y_i \,\epsilon\, Ext^{1,|x_i|}$ es representado por $[x_i]$ en $C_\Gamma(Z_p)$ (el cobar complex de A.2.9)

Prueba: Sea $E_i \subset E$ el álgebra exterior sobre x_i. Entonces una E_i-resolución inyectiva de Z_p es dada por

$$0 \longrightarrow Z_p \longrightarrow E_i \xrightarrow{d} E_i \longrightarrow E_i \longrightarrow \cdots$$

donde $d(x_i) = 1$ y $d(1) = 0$. Aplicando $Hom_{E_i}(Z_p, \ )$ nos da un complejo con operador frontera trivial y muestra que $Ext_{E_i}(Z_p, Z_p) = Z_p[y_i]$. Tomando el producto tensorial con los R_i se tiene una E-resolución de Z_p y el resultado se tiene del teorema de Kunneth. ■

Combinando los dos últimos lemas tenemos

COROLARIO 3.1.4.

$$Ext_{A_*}(Z_p, H_*(MU)) = C \otimes Z[a_0, a_1, \ldots]$$

donde C es como en (2.3.5) y $a_i \,\epsilon\, Ext^{1,2p^i-1}$ es representado por $[\tau_i]$ para $p > 2$ y por $[\xi_i]$ para $p = 2$ en $C_{A_*}(H_*(MU))$. Es decir, en la sucesión espectral (3.1.1), el término $E_2 = Ext^{s\,t}_{A_*}(Z_p, H_*(MU, Z_p))$ es un álgebra polinomial sobre generadores x_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, de bigrado

$$\begin{array}{lll} s = 0 & t = 2n & (n \neq p^f - 1) \\ s = 1 & t = 2n + 1 & (n = p^f - 1) \end{array}$$

■

Así hemos calculado el término E_2 de la suceción espectral de Adams para $\pi_*(MU)$. Desde que este es generado por clases de dimensión par, i.e., elementos en $E_2^{s,t}$ con $t-s$ par, no puede existir diferenciales no triviales, i.e., $E_2 = E_\infty$.

Para poder deducir la estructura requerida de $\pi_*(MU)$, necesitamos el siguiente lema que es una de las propiedades de la sucesión espectral del capítulo 1. Contamos con Adams [1] para los detalles.

LEMA 3.1.5. *Dado un espectro X, tal que $\pi_r(X)$ es finitamente generado para cada r y cero para $r<0$. Entonces, dados m y e enteros, existe $s = s(m,e)$ tal que cualquier elemento de $\pi_m(X)$ con filtración $\geq s$ en la sucesión espectral*

$$Ext_{A_*}^{s\ t}(Z_p, H_*(X, Z_p)) \overset{s}{\Rightarrow} \pi_{s-t}(X)$$

son divisibles por p^e en $\pi_m(X)$.

Primero recordemos que el ideal de augmentation (augmentation ideal) de un anillo graduado conexo A es definido por

$$I = \sum_{n>0} A_n$$

Los elementos de I^2 son llamados .elementos descomponibles". El çociente descomponible"$Q_*(A)$ es definido por

$$Q_*(A) = I/I^2$$

Utilizaremos $Q_*(A)$ para estudiar a A. Así si $L = Z[b_1, b_2, \ldots]$, entonces $Q_m(L)$ y $Q_m(MU(pto))$ son ceros a menos que $m = 2n$, $n > 0$. Además se tiene $Q_{2n}(L) \cong Z$ generado por $[b_n]$.

LEMA 3.1.6. $Q_m(\pi_*(MU)) \otimes Z_p = \begin{cases} Z_p & \textit{Si } m = 2n,\ n > 0 \\ 0 & \textit{En otro caso} \end{cases}$

Prueba: Si $m \neq 2n$ entonces el resultado es trivial. Así asumiremos que $m = 2n$, $n > 0$.

Sea $t_i \,\epsilon\, \pi_{2i}(MU)$ un elemento cuya clase en el $E_2 - term$ sea el generador x_i de (3.1.4). Se afirma que $Q_{2i}(\pi_*(MU)) \otimes Z_p$ es generado por la imagen de t_i. Sea $y \,\epsilon\, \pi_{2i}(MU)$ y sea s como en (3.1.5), tomando $m = 2n$ y $e = 1$, entonces (por induccion sobre la filtracion) podemos encontrar un polinomio $q(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ tal que $y - q(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ tiene filtración $\geq s$ y así

$$y = q(t_0, t_1, \ldots, t_n) + pz.$$

Desde que $\pi_0(MU) = Z$, el coeficiente de t_n(que a priori es un polinomio sobre t_0) debe ser un entero c. Así deducimos que

$$y = ct_n \ mod\ I^2 + p\pi_*(MU)$$

donde $I = \sum_{i>0} \pi_*(MU)$, i.e., $Q_m(\pi_*(MU)) \otimes Z_p$ es generado por la imagen de t_n. ■

LEMA 3.1.7. $Q_m(\pi_*(MU)) = \begin{cases} Z & \textit{Si } m = 2n, \ n > 0 \\ 0 & \textit{En otro caso} \end{cases}$

Prueba: Se sigue de 3.1.6, pues $Q_m\pi_*(MU)$ es un grupo abeliano finitamente generado y se puede usar el teorema de estructura parea grupos finitamente generados. ■

Ahora, tomando un generador x_i en cada dimensión par, definimos $R = Z[x_1, x_2, \ldots]$. Ahora el map natural $R \longrightarrow \pi_*(MU)$ es un isomorfismo cuando tomamos producto tensorial con $Z_{(p)}$ para cada primo p. Entonces se tiene un isomorfismo global. Esto completa la prueba de 3.1.1. ■

Capítulo 4

Comentarios

En este capítulo, como su nombre sugiere nos dedicaremos a dar algunos comentarios sobre el resultado principal del capítulo anterior (Teorema (3.1.1)), tratando de resaltar la importancia del mismo. Se enuncia algunos resultados y se indica la bibliografía correspondiente donde se puede encontrar una exposición de los mismos. No intento dar un desarrollo de estos temas, sólo se consideran en esta sección para enfatizar que el conocimiento de $MU^*(pt)$ es un primer paso para empezar el estudio de la teoría de Cobordismo Complejo.

4.1. Algunos resultados que están relacionados con $MU^*(pt)$

En esta sección empezaré recordando algunos detalles sobre una teoría de homología y cohomología generalizada. Dado un espectro de anillos E, se tiene que $(E^*(pt) = \pi_*(E), E_*(E))$ es un algebroide de Hopf (ver apéndice) y que para cualquier espacio $E^*(X)$ es un módulo sobre $E^*(E)$ y $E_*(X)$ es un comódulo sobre el algebroide de Hopf $(\pi_*(E), E_*(E))$. Para el caso de MU se tiene que que $MU_*(X)$ es un comódulo sobre $(MU^*(pt), MU_*(MU))$.

También qisiera mencionar algunos resultados que aparecen en el libro "The Relation of Cobordism to K-Theory"de Conner-Floyd [3]. En este libro se afirma que la K-teoría compleja se puede obtener a partir de la teoría de Cobordismo Complejo MU. Más aún se tiene el siguiente resultado.

$$MU^*(X, A) \otimes_{MU^*(pt)} Z \cong K^*(X, A)$$

como $MU^*(pt)$ módulos.

Otro resultado interesante que se debe mencionar, aparece en Conner-Floyd [4]. Este resultado relaciona los anillos de Cobordismo Complejo con los anillos de cohomología singular. De manera más precisa se tiene

$$MU^*(X, A) \cong H^*(X, A) \otimes MU^*(MU)$$

como $MU_*(pt)$ módulos.

4.2. Una Prueba Alternativa Utilizando una Interpretación Geométrica de la teoría de Cobordismo

En esta sección mencionaremos el paper de Quillen [15] en el que se da una prueba alternativa para el resultado principal del capítulo anterior (Teorema (3.1.1)), utilizando una interpretación geométrica de la teoría de Cobordismo. En su trabajo,Quillen, no considera a la teoría de cobordismo complejo MU como la teoría de homología generalizada, sino como el conjunto de clases de equivalencia de maps cobordantes, como lo describiremos más adelante. Tampoco utiliza la sucesión espectral de Adams para realizar dicho cálculo, él utiliza la teorí de grupos formales y el teorema de estructura del anillo de Lazard.

En esta sección sólo se comentará sobre la interpretación geométrica que hace Quillen para $MU^*(X)$, que es el punto de partida de su trabajo.

Dos maps complejo-orientados propios $f_i : Z_i \longrightarrow X$, i=0,1, son cobordantes si existe un map complejo-orientado propio $b : W \longrightarrow X \times R$ tal que el map $\epsilon_i : X \longrightarrow X \times R$, $\epsilon_i(x) = (x, i)$, es transversal a b y es tal que el pull-back de b por ϵ_i es isomorfo a la orientación compleja inducida de f_i, i=0,1. Que dos maps sean cobordantes es una relación de equivalencia y se tiene la siguiente generalización del teorema de Thom.

TEOREMA 4.2.1. *Para una variedad X, $MU^q(X)$ es canónicamente isomorfo al conjunto de clases de cobordismo de maps complejo-orientados propios de dimensión $-q$.*

■

Apéndice A

Álgebras y Algebroides de Hopf

Un álgebra de Hopf conmutativo y no coconmutativo tal como el álgebra de Steenrod A, es un objeto familiar en topología algebraica y la importancia de estudiarlo es obvia. Hacer cálculos con la sucesión espectral de Adams requiere un continuo uso del álgebra homológica en la categoría de A-módulos o de manera equivalente en la categoría de A_*-comódulos. En particular se tiene muchos teoremas de cambio de anillos (A.1.19, A.1.21 y A.3.10), estos son las principales herramientas que evitará realizar excesivos cálculos. Estos resultados son abordados con cierto detalle en este apéndice.

El uso de teorías de homología generalizada como MU, requiere una generalización de la definicón de álgebra de Hopf a la de algebroide de Hopf. Este término se debe a Haynes Miller y una explicación racional del mismo se sigue de la siguiente observación de teoría de categorías. Un álgebra de Hopf tal como A_* es un objeto de cogrupo en la categoría de los $Z/(p)$-álgebras graduadas. En otras palabras, dado un tal álgebra R, el coproducto Δ : $A_* \longrightarrow A_* \otimes A_*$ induce un map $Hom(A_*, R) \times Hom(A_*, R) \longrightarrow Hom(A_*, R)$ que dota a $Hom(A_*, R)$ de una estructura de grupo. Ahora la generalización de algebras de Hopf a la de algebroides de Hopf corresponde precisamente a la generalización de grupos a grupoides.

El objetivo de este apéndice es generalizar las herramientas usuales utilizadas en cálculos homológicos sobre álgebras de Hopf a la categoría de comódulos sobre algebroides de Hopf.

A.1. Definiciones Básicas

DEFINICIÓN A.1.1. *Un algebroide de Hopf sobre un anillo conmutativo K es un par (A, Γ) de K-álgebras conmutativas junto con los siguientes maps de estructura,*

$\eta_L : A \longrightarrow \Gamma$ *Unidad a izquierda o source*

$$\eta_R : A \longrightarrow \Gamma \qquad\qquad \textit{Unidad a derecha o target}$$

$$\Delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma \qquad\qquad \textit{Coproducto}$$

$$\xi : \Gamma \longrightarrow A \qquad\qquad \textit{Counidad o identidad}$$

$$c : \Gamma \longrightarrow \Gamma \qquad\qquad \textit{conjugación o inversa}$$

Γ adquiere la estructura de A-módulo a izquierda vía η_L y de A-módulo a derecha vía η_R, $\Gamma \otimes_A \Gamma$ es el producto tensorial usual de bimódulos, Δ y ξ son maps de A-bimódulos.
Estos maps de estructura deben satisfacer las siguientes relaciones:

(a) $\xi\eta_L = \xi\eta_R = 1_A$.

(b) $(\Gamma \otimes \xi)\Delta = (\xi \otimes \Gamma)\Delta = 1_\Delta$ *(* $\Gamma \xrightarrow{\Delta} \Gamma \otimes \Gamma \xrightarrow{\Gamma\otimes\xi} \Gamma \otimes A = \Gamma$ *)*

(c) $(\Gamma \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \Gamma)\Delta$ *(Asociativo)*

(d) $c\eta_R = \eta_L$ *y* $c\eta_L = \eta_R$ *(Invertir un morfismo intercambia source and target)*

(e) $cc = 1_\Gamma$

(f) Existen maps que hacen conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma & \xleftarrow{c.\,\Gamma} & \Gamma \otimes_K \Gamma & \xrightarrow{\Gamma.\,c} & \Gamma \\
\uparrow & \nwarrow & \downarrow & \nearrow & \uparrow \\
\eta_R & & \Gamma \otimes_A \Gamma & & \eta_L \\
| & & \uparrow \Delta & & | \\
A & \xleftarrow{\xi} & \Gamma & \xrightarrow{\xi} & A
\end{array}$$

donde $c.\Gamma(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = c(\gamma_1)\gamma_2$ y $\Gamma.c(\gamma_1 \otimes \gamma_2) = \gamma_1 c(\gamma_2)$; para $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.
Si nuestras álgebras son graduadas, las convenciones usuales sobre los signos son asumidas, i.e., conmutatividad significa

$$xy = (-1)^{|x||y|}yx,$$

donde $|x|$ y $|y|$ son los grados o dimensiones de x y de y respectivamente.

Un algebroide de Hopf graduado es conexo si los sub-A-módulos a izquierda y a derecha generados por Γ_0 son ambos isomorfos a A.

En la mayoría de los casos A se sobreentiende y el algebroide de Hopf será denotado simplemente por Γ.

Notar que si $\eta_R = \eta_L$, Γ es un álgebra de Hopf conmutativo sobre A. El ejemplo motivador de un algebreoide de Hopf es $(\pi_*(E), E_*(E))$ para un espectro E adecuado.

DEFINICIÓN A.1.2. *Un Γ-comódulo a izquierda M es un A-módulo a izquierda M junto a un map A-lineal a izquierda $\psi : M \longrightarrow \Gamma \otimes_A M$ que es counitario y coasociativo, i.e., tal que $(\xi \otimes M)\psi = M$ (Identidad sobre M) y $(\Delta \otimes M)\psi = (\Gamma \otimes \psi)\psi$.*

Obs. A.1.3.

$$M \xrightarrow{\psi} \Gamma \otimes_A M \xrightarrow{\xi \otimes M} A \otimes_A M = M$$

$$M \xrightarrow{\psi} \Gamma \otimes M \underset{\Delta \otimes M}{\xrightarrow{\Gamma \otimes \psi}} \Gamma \otimes \Gamma \otimes M$$

Un Γ-comódulo a derecha es definido de manera similar. Un elemento $m \epsilon M$ es primitivo si $\psi(m) = 1 \otimes m$.

Un comódulo algebra M es un comódulo que también es un A-álgebra conmutativa asociativa tal que el map de estructura ψ es un map de álgebras. Si M y N son Γ-comódulos a izquierda, su producto tensorial es $M \otimes_A N$, siendo su map estructura

$$M \otimes N \xrightarrow{\psi_M \otimes \psi_N} \Gamma \otimes M \otimes \Gamma \otimes N \longrightarrow \Gamma \otimes \Gamma \otimes M \otimes N \longrightarrow \Gamma \otimes M \otimes N$$

Donde el segundo map intercambia los factores segundo y tercero y el tercer map es la multiplicación sobre Γ. Todos los productos tensoriales son sobre A y sólo usan la estructura de A-módulo a izquierda sobre A. Un comódulo diferencial C^* es un complejo de cocadenas en el cada C^s es un comódulo y el operador frontera es un map de comódulos.

TEOREMA A.1.4. *Si Γ es flat como A-módulo, entonces la categoría de Γ-comódulos a izquierda es abeliana.*

Prueba: Si $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de A-módulos, entonces como Γ es flat sobre A,

$$0 \longrightarrow \Gamma \otimes_A M' \longrightarrow \Gamma \otimes_A M \longrightarrow \Gamma \otimes_A M'' \longrightarrow 0$$

es también exacta. Si M es un comódulo a izquierda, entonces una estructura de comódulo sobre M' o M'' determinará la misma estructura sobre la otra. De este hecho se sigue que el kernel o cokernel (como un A-módulo) de un map de comódulos tiene una única estructura de cómulo, i.e., esta categoría tiene kernels y cokernels. Las otras propiedades de la definición de categorías abelianas se verifican facilmente. ■

A causa de este resultado asumiremos de ahora en adelante que Γ es flat sobre A.

DEFINICIÓN A.1.5. *Sean M y N Γ-comódulos a derecha y a izquierda respectivamente. Su producto cotensorial sobre Γ es el K-módulo definido por la sucesión exacta.*

$$0 \longrightarrow M \,\square_\Gamma\, N \hookrightarrow M \otimes_A N \xrightarrow{\psi_M \otimes N - M \otimes \psi_N} M \otimes_A \Gamma \otimes_A N.$$

i.e., $M \,\square_\Gamma\, N = Ker(\psi_M \otimes N - M \otimes \psi_N)$; donde ψ_M y ψ_N denotan los maps de estructura de comódulos para M y N.

Notar que $M \,\square_\Gamma\, N$ no es un comódulo, nisiquiera un A-módulo. Pero sí es un K-módulo.

Un comódulo a izquierda M puede ser dotado de una estructura de comódulo a derecha por

$$M \xrightarrow{\psi} \Gamma \otimes M \xrightarrow{T} M \otimes \Gamma \xrightarrow{M \otimes c} M \otimes \Gamma$$

donde T intercambia los dos factores y c es el map conjugación (ver A1.1.1). Un comódulo a derecha puede ser convertido en un comódulo a izquierda de manara similar. Con esto en mente se tiene:

PROPOSICIÓN A.1.6. $M \,\square_\Gamma\, N = N \,\square_\Gamma\, M$

El siguiente lema relaciona el producto cotensorial con Hom.

LEMA A.1.7. *Sean M y N Γ-comódulos a izquierda con M proyectivo sobre A. Entonces*

(a) $Hom_A(M, A)$ *es un Γ-comódulo a derecha y*

(b) $Hom_\Gamma(M, N) = Hom_A(M, A) \,\square_\Gamma\, N$, *en particular* $Hom_\Gamma(A, N) = A \,\square_\Gamma\, N$

Prueba: Sean $\psi_M : M \longrightarrow \Gamma \otimes_A M$ y $\psi_N : N \longrightarrow \Gamma \otimes_A N$ los maps de estructura de comódulos.

Se define $\psi_M^*, \psi_N^* : Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_A(M, \Gamma \otimes N)$ por

$$\psi_M^*(f) = (\Gamma \otimes f)\psi_M \;\text{ y }\; \psi_N^*(f) = \psi_N f$$

para $f \in Hom_A(M, N)$. Desde que M es proyectivo, se tiene el isomorfismo canónico

$$Hom_A(M, A) \otimes_A N \cong Hom_A(M, N)$$

Por tanto para $N = A$ se tiene

$$\psi_M^* : Hom_A(M, A) \longrightarrow Hom_A(M, A) \otimes_A \Gamma$$

Para probar que este es un map de estructura de Γ-comódulos a derecha se debe probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Hom_A(M,A) & \xrightarrow{\psi_M^*} & Hom_A(M,\Gamma) \\ \psi_M^* \downarrow & & \downarrow Hom(M,A) \\ Hom_A(M,\Gamma) & \xrightarrow{\psi_M^*} & Hom_A(M,\Gamma\otimes\Gamma) \end{array}$$

i.e. que ψ_M^* es asociativo.

Por cálculo directo se tiene :

$$\begin{aligned} \psi_M^*\psi_M^*(f) &= (\Gamma\otimes\psi_M^*(f))\psi_M \\ &= (\Gamma((\Gamma\otimes f)\psi_M))\psi_M \\ &= (\Gamma\otimes\Gamma\otimes f)(\Gamma\otimes\psi_M)\psi_M \\ &= (\Gamma\otimes\Gamma\otimes f)(\Delta\otimes M)\psi_M \\ &= (\Delta\otimes A)(\Gamma\otimes f)\psi_M \\ &= (\Delta\otimes A)\psi_M^*(f) \end{aligned}$$

Así el diagrama conmuta y se tiene (a).

Para (b) notar que por definición:

$$Hom(M,N) = Ker(\psi_M^* - \psi_N^*) \subset Hom_A(M,N)$$

mientras que

$$Hom_A(M,A)\,\square_\Gamma\, N = Ker(\psi_M^*\otimes N - Hom_A(M,A)\otimes\psi_N) \subset Hom_A(M,A)\otimes_A N$$

y el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} Hom(M,A)\otimes N & \xrightarrow{\cong} & Hom_A(M,N) \\ \psi_M^*\otimes N \downarrow\downarrow Hom(M,A)\otimes\psi_N & & \psi_M^* \downarrow\downarrow \psi_N^* \\ Hom(M,A)\otimes\Gamma\otimes N & \xrightarrow{\cong} & Hom_A(M,\Gamma\otimes_A N) \end{array}$$

■

Las siguientes definiciones y lemas conducen a la extension de algebroides de Hopf dado en (A.1.15).

En (A.3.14) se obtendrá la correspondiente sucesión espectral de Cartan-Eilenberg.

DEFINICIÓN A.1.8. *Un map de hopf algebroides $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$ es un par de maps de K-álgebras $f_1 : A \longrightarrow B$, $f_2 : \Gamma \longrightarrow \Sigma$ tales que*

$$f_1\xi = \xi f_2,\;\; f_2\eta_R = \eta_R f_1,\;\; f_2\eta_L = \eta_L f1,$$

$$f_2 c = c f_2 \;\; y \;\; \Delta f_2 = (f_2\otimes f_2)\Delta$$

LEMA A.1.9. *Sea $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$ un map de Hopf algebroides. Entonces $\Gamma \otimes_A B$ es un Σ-comódulo a derecha y para cualquier Σ-comódulo a izquierda N, $(\Gamma \otimes_A B) \,\square_\Sigma\, N$ es un sub-Γ-comódulo a izquierda de $\Gamma \otimes_A N$, donde el map de estructura para este último es $\Delta \otimes N$.*

Prueba: El map $(\Gamma \otimes f_2)\Delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma \otimes_A \Sigma = (\Gamma \otimes_A B) \otimes_B \Sigma$ se extiende de manera única a $\Gamma \otimes_A B$, dotando a este una estructura de Σ-comódulo a derecha. Por definición $(\Gamma \otimes_A B) \,\square_\Sigma\, N$ es el kernel de la suseción exacta

$$0 \longrightarrow (\Gamma \otimes_A B) \,\square_\Sigma\, N \longrightarrow \Gamma \otimes_A N \longrightarrow \Gamma \otimes_A \Sigma \otimes_B N$$

donde la flecha de la derecha es la diferencia entre $(\Gamma \otimes f_2)\Delta \otimes N$ y $\Gamma \otimes \psi$. Puesto que $\Gamma \otimes_A N$ y $\Gamma \otimes_A \Sigma \otimes_B N$ son Γ-comódulos a izquierda es suficiente probar que los dos maps respetan la estructura de comódulo. Esto es claro para $\Gamma \otimes \psi$ y para $(\Gamma \otimes f_2)\Delta \otimes N$ necesitamos que el siguiente diagrama conmute, el producto tensorial con N es sobre B.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \otimes_A B & \xrightarrow{(\Gamma \otimes f_2)\Delta \otimes B} & \Gamma \otimes_A \Sigma \\ \Delta \otimes B \downarrow & & \downarrow \Delta \otimes \Sigma \\ \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A B & \xrightarrow{\Gamma \otimes (\Gamma \otimes f_2)\Delta \otimes B} & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A \Sigma \end{array}$$

Esto se tiene del hecho de que f es un map de algebroides de Hopf. ■

DEFINICIÓN A.1.10. *Si (A,Γ) es un algebroide de Hopf, el álgebra de Hopf asociado (A,Γ') es definido por $\Gamma' = \Gamma/(\eta_L(a) - \eta_R(a), a \in A)$.*

DEFINICIÓN A.1.11. *Un map de algebroides de Hopf $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (A,\Sigma)$ es normal si $f_2\Gamma \longrightarrow \Sigma$ es suryectivo, $f_1 : A \longrightarrow A$ es la identidad y $\Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A = A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma$ en Γ.*

DEFINICIÓN A.1.12. *Un algebroide de Hopf (A,U) es unicursal si es generado, como álgebra, por las imágenes de η_L y η_R, i.e., si $U = A \otimes_D A$ donde $D = A \,\square_U\, A$ es un subálgebra de A.(Se verifica que la estructura de álgebra de Hopf de U es única.)*

LEMA A.1.13. *Sea M un comódulo a derecha sobre un algebroide de Hopf unicursal (A,U). Entonces*

(a) M es isomorfo como comódulo a $M \otimes_A A$ con map de estructura $M \otimes \eta_R$

(b) $M = (M \,\square_U\, A) \otimes_D A$ como A-módulos.

Prueba: Para $m \in M$ sea $\psi(m) = m' \otimes m''$. Desde que U es unicursal, podemos asumir que m'' es la imagen de η_R. Se sigue que

$$(\psi \otimes U)\psi(m) = (M \otimes \Delta)\psi(m) = m' \otimes 1 \otimes m''$$

así cada m' es primitivo. Sea $\widetilde{m} = m' \epsilon\ (m'')$. Entonces $\psi(\widetilde{m}) = m' \otimes m'' = \psi(m)$, así $m = \widetilde{m}$ puesto que ψ es un monomorfismo; por tanto M es generado como un A-módulo por los elementos primitivos y se tiene (a). Para (b), usando (a), tenemos,

$$(M \square_U A) \otimes_D A = M \otimes_A (A \square_U A) \otimes_D A = M \otimes_A D \otimes_D A = M$$

■

LEMA A.1.14. *Sea (A, Σ) un algebroide de Hopf, (A, Σ') el álgebra de Hopf asociada (A.1.10), $D = A \square_\Sigma A$, y (A, U) el álgebra de Hopf unicursal (A.1.12) con $U = A \otimes_D A$. Entonces*

(a) $U = \Sigma \square_{\Sigma'} A$ y

(b) Para un Σ-comódulo a izquierda M, $A \square_{\Sigma'} M$ es un U-comódulo a izquierda y $A \square_\Sigma M = A \square_U (A \square_{\Sigma'} M)$.

Prueba: Por definición, $\Sigma' = A \otimes_U \Sigma$, donde la estructura de U-módulo sobre A es dado $\xi : U \longrightarrow A$, así se tiene

$$\Sigma \otimes_A \Sigma' = \Sigma \otimes_A A \otimes_U \Sigma = \Sigma \otimes_U \Sigma$$

Por (A.1.4), existe una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Sigma \square_{\Sigma'} A \longrightarrow \Sigma \otimes_U \Sigma$$

donde el último map es inducido por $\Delta = \Sigma \otimes \eta_L$. Un elemento $\sigma \epsilon \Sigma$ tiene $\Delta(\sigma) = \sigma \otimes 1$ en $\Sigma \otimes_U \Sigma$ si y sólo si $\sigma \epsilon U$, así se tiene (a).

Para (b) tenemos

$$A \square_\Sigma M = A \square_U (U \square_\Sigma M)$$

y

$$U \square_\Sigma M = (A \square_{\Sigma'} \Sigma) \square_\Sigma M = A \square_{\Sigma'} M$$

■

TEOREMA A.1.15. *Sea $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (A, \Sigma)$ un map normal de Hopf algebroides y sean $D = A \square_\Sigma A$ y $\Phi = A \square_\Sigma \Gamma \square_\Sigma A$. Entonces (D, Φ) es un sub-algebroide de Hopf de (A, Γ).*

(Notar que por (A.1.9), $A \square_\Sigma \Gamma$ y $\Gamma \square_\Sigma A$ son Γ-comódulos a izquierda y a derecha respectivemente, así las expresiones $(A \square_\Sigma \Gamma) \square_\Sigma A$ y $A \square_\Sigma (\Gamma \square_\Sigma A)$ tinen sentido. Se verifica , sin usar la normalidad de f, que ellos son iguales, de este modo Φ está bien definida.)

Prueba: Por definición un elemento $a \epsilon A$ está en D si y sólo si $f_2\eta_L(a) = f_2\eta_R(a)$ y está en Φ si y sólo si $(f_2 \otimes \Gamma \otimes f_2)\Delta^2(\gamma) = 1 \otimes \gamma \otimes 1$. Para ver que η_R mapea D hacia Φ, tenemos para $d \epsilon D$

$$\begin{aligned} (f_2 \otimes \Gamma \otimes f_2)\Delta^2\eta_R(d) &= 1 \otimes 1 \otimes f_2\eta_R(d) \\ &= 1 \otimes 1 \otimes f_2\eta_L(d) \\ &= 1 \otimes \eta_R(d) \otimes 1 \end{aligned}$$

El argumento para η_L es similar. Es claro que Φ es invariante bajo la conjugación c. Para probar que ξ mapea Φ hacia D, necesitamos probar $f_2\eta_R\xi(\phi) = f_2\eta_L\xi(\phi)$ para $\phi \epsilon \Phi$. Pero $f_2\eta_R\xi(\phi) = \eta_R\xi f_2(\phi)$ y desde que $\Delta^2 f_2(\phi) = 1 \otimes f_2(\phi) \otimes 1$ tenemos $\Delta f_2(\phi) = 1 \otimes f_2(\phi) = f_2(\phi) \otimes 1$ así $f_2(\phi) \epsilon D$ y $(\eta_R - \eta_L)\xi f_2(\phi) = 0$.

Para definir un coproducto sobre Φ primero mostraremos que el map natural de $\Phi \otimes_D \Phi$ a $\Gamma \otimes_A \Gamma$ es un monomorfismo. Esto equivale a probar que $a\phi \epsilon \Phi$ si y sólo si $a \epsilon D$. Ahora por definición $a\phi \epsilon \Phi$ si y sólo si

$$f_2(a\phi') \otimes \phi'' \otimes f_2(\phi''') = 1 \otimes a\phi \otimes 1 = f_2\eta_R(a) \otimes \phi \otimes 1$$

desde que $\phi \epsilon \Phi$ tenemos

$$f_2(\phi') \otimes \phi'' \otimes f_2(\phi''') = 1 \otimes \phi \otimes 1$$

Así se tiene

$$f_2(a) \otimes 1 \otimes 1 = f_2\eta_R(a) \otimes 1 \otimes 1$$

i.e., $a \epsilon D$.

Ahora consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} (D,\Phi) & \longrightarrow & (A,\widetilde{\Phi}) & \xrightarrow{g} & (A,U) \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ (D,\Phi) & \longrightarrow & (A,\Gamma) & \xrightarrow{f} & (A,\Sigma) \\ & & \downarrow f' & & \downarrow \\ & & (A,\Sigma') & = & (A,\Sigma') \end{array}$$

Donde Σ' es el álgebra de Hopf asociada a Σ (A.1.10), f' es al map inducido, U es el algebroide de Hopf unicursal (A.1.12) $A \otimes_D A$, $\widetilde{\Phi} = A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A$ y g será contruido más adelante. Veremos que Φ y $\widetilde{\Phi}$ son algebroides de Hopf.

Ahora el map f' es normal desde que f lo es y $A \,\square_{\Sigma'}\, A = A$, así que la afirmación de que $\widetilde{\Phi}$ es un algebroide de Hopf es un caso especial del teorema. Por tanto ya tenemos mostrado que este posee todas las estructuras requeridas excepto el de coproducto. Desde que $\Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A = A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma$, tenemos $\widetilde{\Phi} = A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A = A \,\square_{\Sigma'}\, A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma = A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma$. Se verifica que la imagen de $\Delta : \Gamma \longrightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma$ está contenido en $\Gamma \,\square_\Gamma\, \Gamma$ y por tanto en $\Gamma \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma$. También Δ mapea $\widetilde{\Phi} =$

$A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A$ a $A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A = \widetilde{\Phi} \,\square_{\Sigma'}\, \widetilde{\Phi} \subset \widetilde{\Phi} \otimes_A \widetilde{\Phi}$, así $\widetilde{\Phi}$ es un algebroide de Hopf.

Desde que $\widetilde{\Phi} = \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A$ y $U = \Sigma \,\square_{\Sigma'}\, A$ [A.1.14(a)] podemos definir g como $f_2 \,\square\, A$. Se sigue de [A.1.14(b)] que

$$\begin{aligned} \Phi &= A \,\square_{\Sigma}\, \Gamma \,\square_{\Sigma}\, A = A \,\square_U\, (A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A) \,\square_U\, A \\ &= A \,\square_U\, \widetilde{\Phi} \,\square_U\, A \end{aligned}$$

Por [A.1.13(b)] tenemos $\widetilde{\Phi} = A \otimes_D \Phi \otimes_D A$, así

$$\widetilde{\Phi} \otimes_A \widetilde{\Phi} = A \otimes_D \widetilde{\Phi} \otimes_D A \otimes_D \Phi \otimes_D A$$

El coproducto Δ mapea $\widetilde{\Phi}$ a $\widetilde{\Phi} \,\square_U\, \widetilde{\Phi} \subset \Phi \otimes_A \Phi$ y se tiene

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi} \,\square_U\, \widetilde{\Phi} &= \widetilde{\Phi} \otimes_A (A \,\square_U\, A) \otimes_A \widetilde{\Phi} \qquad \text{por A.1.13(a)} \\ &= A \otimes_D \Phi \otimes_D (A \,\square_U\, A) \otimes_D \Phi \otimes_D A \\ &= A \otimes_D \Phi \otimes_D D \otimes_D \Phi \otimes_D A \\ &= A \otimes_D \Phi D \otimes \Phi \otimes_D A \end{aligned}$$

Puesto que Δ es A-bilineal , este mapea Φ a $\Phi \otimes_D \Phi$ y Φ es un algebroide de Hopf. ■

DEFINICIÓN A.1.16. *Una extensión de algebroides de Hopf es un diagrama*

$$(D, \Phi) \xrightarrow{i} (A, \Gamma) \xrightarrow{f} (A, \Sigma)$$

donde f es normal (A.1.11) y (D, Φ) es como en (A.1.15).

La extensión es cocentral si el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \Gamma \otimes \Sigma \\ & (\Gamma \otimes f_2)\Delta \nearrow & | \\ \Gamma & & t \\ & (f_2 \otimes \Gamma)\Delta \searrow & \downarrow \\ & & \Sigma \otimes \Gamma \end{array}$$

(Donde t intercambia factores) conmuta salvo por los signos usuales. En particular Σ debe ser coconmutativo.

Notar que (como se muestra en la prueba de A.1.15) si Σ es un álgebra de Hopf entonces $\Phi = A \,\square_{\Sigma}\, \Gamma = \Gamma \,\square_{\Sigma}\, A$. En general se tiene

LEMA A.1.17. *Con las mismas notaciones anteriores, $A \,\square_{\Sigma}\, \Gamma = \Phi \otimes_D A$ como Γ-comódulo a derecha.*

prueba: Usando A.1.13 y A.1.14 tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi \otimes_D A &= A \,\square_\Sigma\, \Gamma \,\square_\Sigma\, A \otimes_D A \\
&= A \,\square_\Sigma\, \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A \,\square_U\, A \otimes_D A \\
&= A \,\square_\Sigma\, \Gamma \,\square_{\Sigma'}\, A \\
&= A \,\square_\Sigma\, A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \\
&= A \,\square_U A \,\square_{\Sigma'}\, A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \\
&= A \,\square_U A \,\square_{\Sigma'}\, \Gamma \\
&= A \,\square_\Sigma\, \Gamma
\end{aligned}$$

■

TEOREMA A.1.18 (Teorema de estructura de comódulo álgebras)**.** *Sean (B, Σ) un algebroide de Hopf graduado y conexo, M un Σ-comódulo álgebra a derecha graduado y conexo y $C = M \,\square_\Sigma\, B$. Si se supone*

(i) Existe un comódulo álgebra map suryectivo $f : M \longrightarrow \Sigma$

(ii) C es un B-módulo y con esta estructura es un sumando directo de M.

Entonces M es isomorfo a $C \otimes_B \Sigma$ simultaneamente como un C-módulo a izquierda y como un Σ-comódulo a derecha. ■

Probaremos esto después de enunciar algunos corolarios. Si Σ es un algebra de Hopf sobre un campo K, entonces la segunda hipótesis es trivial. Así tenemos el siguiente resultado que aparece como el teorema 4.7 en Milnor and Moore [11].

COROLARIO A.1.19. *Sea (K, Σ) un álgebra de hopf graduado conexo conmutativo sobre un campo K. Sea M un K-álgebra y un Σ-comómodulo a derecha y sea $C = M \,\square_\Sigma\, K$. Si existe una suryección $f : M \longrightarrow \Sigma$ que es homorfismo de álgebras y Σ-comódulos, entonces M es isomorfo a $C \otimes \Sigma$ simultaneamente como un C-módulo a izquierda y como un Σ-comódulo a derecha.*

COROLARIO A.1.20. *Sea $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ un map de algebroides de Hopf graduados y conexos (**??**) y sea $\Gamma' = \Gamma \otimes_A B$ y $C = \Gamma' \,\square_\Sigma\, B$. Si se supone*

(i) $f_2' : \Gamma' \longrightarrow \Sigma$ es sobre y

(ii) C es un B-módulo y existe un map B-lineal $g : \Gamma' \longrightarrow C$

COROLARIO A.1.21. *Sean K un campo, $f : (K, \Gamma) \longrightarrow (K, \Sigma)$ un map de álgebras de Hopf conmutativos graduados conexos y sea $C = \Gamma \,\square_\Sigma\, K$. Si f es suryectivo, entonces Γ es isomorfo a $C \otimes \Gamma$ simultaneamente como un C-módulo a izquierda y como un Σ-comódulo a derecha.*

En A.3.9 y A.3.10 se dan algunos isomorfismos de cambio de anillos de grupos Ext a los maps de los dos corolarios anteriores.

Prueba de A.1.18: Sea $i : C \longrightarrow M$ la inclusión natural y sea $g : M \longrightarrow C$ un map B-lineal tal que gi es la identidad. Definimos $\widetilde{g} : M \longrightarrow C \otimes_B \Sigma$ como $(g \otimes \Sigma)\psi$; este es un map de Σ-comódulos pero no necesariamente de C-módulos y mostraremos más adelante que este es un isomorfismo.

En seguida se observa que $f \,\square\, B : C \longrightarrow B$ es sobre. En dimensión cero, este es simplemente f, que hemos asumido que es sobre, y como este es B-lineal es sobre. Sea $j : B \longrightarrow C$ un spliting B-lineal de $f \,\square\, B$. Entonces $h = \widetilde{g}^{-1}(j \otimes \Sigma) : \Sigma \longrightarrow M$ es un comódulo spliting de f.

Definimos $\widetilde{h} : C \otimes_B \Sigma \longrightarrow M$ por $\widetilde{h}(c \otimes \sigma) = i(c)h(\sigma)$ para $c \,\epsilon\, C$ y $\sigma \,\epsilon\, \Sigma$. Es claro que este es un map C-lineal de comódulos y mostraremos que este es el isomorfismo que se busca. tenemos

$$\widetilde{g\widetilde{h}}(c \otimes \sigma) = \widetilde{g}(i(c)h(\sigma)) = g(i(c)h(\sigma')) \otimes \sigma'' = c \otimes \sigma$$

donde la segunda igualdad se cumple porque $i(c)$ es primitivo en M y la congruencia es módulo los elementos de menor grado con respecto a la siguiente filtración () sobre $C \otimes_B \Sigma$. Definimos $F_n(C \otimes_B \Sigma) \subset C \otimes_B \Sigma$ como el sub-K-módulo generado porlos elementos de la forma $c \otimes \sigma$ con $dim\sigma \leq n$. Se sigue que $\widetilde{g\widetilde{h}}$ y por tanto h son isomorfismos.

Aún necesitamos mostrar que $\widetilde{g}$ es un isomorfismo. Para mostrar que este es 1-1, sea $\widetilde{m} \otimes \sigma$ el primer término (con respecto a la filtración de arriba de $M \otimes \Sigma$) de $\psi(m)$. Se sigue de la coasociatidad que $\widetilde{m}$ es primitivo, así $g(\widetilde{m}) \neq 0$ si $m \neq 0$ y $ker\widetilde{g} = 0$. Para mostrar que $\widetilde{g}$ es sobre, notar que para cualquier $c \otimes \sigma \,\epsilon\, C \otimes_B \Sigma$ podemos elegir $m \,\epsilon\, f^{-1}(\sigma)$ y se tiene

$$\widetilde{g}(i(c)m) = g(i(c)m') \otimes m'' = gi(c) \otimes \sigma = c \otimes \sigma$$

así, por argumentos estándares $coker\widetilde{g} = 0$. ■

A.2. Álgebra Homológica

Recordar por (A.1.4) que la categoría de comódulos sobre un algebroide de Hopf (A, Γ) es abeliana siempre que Γ es flat sobre A, lo que significa que podemos hacer álgebra homológica sobre ella. Se quiere estudiar los funtores derivados de *hom* y del producto cotensorial (A.1.5). Los funtores derivados son discutidos en muchos libros, por ejemplo, Cartan-Eilenberg [2], Matsumura [8], Schapira [17]. Para definirlos debemos estar seguros que nuestra categoría tiene suficientes inyectivos, i.e., que cada Γ-comódulo puede ser encajado en uno que es inyectivo. Esto puede ser visto como sigue.

DEFINICIÓN A.2.1. *Dado un A-módulo N, definimos una estructura de comódulo sobre $\Gamma \otimes_A N$ por $\psi = \Delta \otimes N$. Entonces para cualquier comódulo M,*

$$\theta : Hom_A(M, N) \longrightarrow Hom_\Gamma(M, \Gamma \otimes_A N)$$

es el isomorfismo dado por $\theta(f) = (\Gamma \otimes f)\psi_M$ para $f \in Hom_A(M, N)$. Para $g \in Hom_\Gamma(M, \Gamma \otimes_A N)$, $\theta^{-1}(g)$ es dado por $\theta^{-1}(g) = (\xi \otimes N)g$

LEMA A.2.2. *Si I es un A-módulo inyectivo, entonces $\Gamma \otimes_A I$ es un Γ-comódulo inyectivo. Por tanto la categoría de Γ-comódulos tiene suficientes inyectivos.*

Prueba: Para probar que $\Gamma \otimes_A I$ es inyectivo, debemos probar que si M es un subcomódulo de N, entonces un map de comódulos de M a $\Gamma \otimes_A I$ se extiende a N. Pero $Hom_\Gamma(M, \Gamma \otimes_A I) = Hom_A(M, I)$ es un sugrupo de $Hom_A(N, I) = Hom_\Gamma(N, \Gamma \otimes_A I)$ desde que I es inyectivo como A-módulo. Por tanto la existencia de suficientes inyectivos en la categoría de A-módulos implica lo mismo en la categoría de Γ-comódulos. ■

Este resultado nos permite hacer la siguiente

DEFINICIÓN A.2.3. *Para Γ-comódulos a izquierda M y N, $Ext^i_\Gamma(M, N)$ es el i-ésimo funtor derivado a derecha de $Hom_\Gamma(M, N)$, considerado como un funtor de N. Para M un Γ-comódulo a derecha, $Cotor^i_\Gamma(M, N)$, es el i-ésimo funtor derivado de $M \square_\Gamma N$ (A.1.5), también considerado como un funtor de N. Los correspondientes grupos graduados serán simplemente denotados por $Ext_\Gamma(M, N)$ y $Cotor_\Gamma(M, N)$ respectivamente.*

En la práctica estaremos interezados en calcular estos funtores cuando la primera variable es proyectiva sobre A. En este caso los dos funtores son esecialmente los mismos por (A.1.7). Por tanto haremos la mayoría de nuestros cálculos en términos de $Cotor$ y enunciaremos los correspondientes argumentos para Ext como corolarios.

Recordar que el 0-ésimo funtor derivado es el mismo funtor si este es exacto a izquierda. El producto cotensoarial es exacto a izquierda en la segunda variable y es flat como A-módulo en la primera variable.

Se sabe que los funtores derivados a derecha pueden ser calculados usando una resolución inyectiva en la segunda variable. Más aún la resolución sólo necesita satisfacer una condición más débil.

LEMA A.2.4. *Sea*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow R^0 \longrightarrow R^1 \longrightarrow \cdots$$

una sucesión exacta larga de Γ-comódulos a izquierda tales que $Cotor^n_\Gamma(M, R^i) = 0$ para $n > 0$. Entonces $Cotor_\Gamma(M, N)$ es la cohomología del complejo

$$Cotor^0_\Gamma(M, R^0) \xrightarrow{\delta_0} Cotor^0_\Gamma(M, R^1) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \qquad \text{(A.2.1)}$$

Prueba: Definimos comódulos N^i inductivamente por $N^0 = N$ y N^{i+1} es el cociente en la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N^i \longrightarrow R^i \longrightarrow N^{i+1} \longrightarrow 0$$

Estos dan sucesiones exactas largas de grupos Cotor, los cuales de acuerdo al comportamiento de $Cotor_\Gamma(M, R^i)$, se reducen a sucesiones de cuatro términos.

$$\begin{array}{cccccc} 0 & \longrightarrow & Cotor^0_\Gamma(M, N^i) & \longrightarrow & Cotor^0_\Gamma(M, R^i) & \\ & \longrightarrow & Cotor^0_\Gamma(M, N^{i+1}) & \longrightarrow & Cotor^1_\Gamma(M, N^i) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

e isomorfismos

$$Cotor^n_\Gamma(M, N^{i+1}) \approx Cotor^{n+1}_\Gamma(M, N^i) \text{ para } n > 0. \qquad \text{(A.2.2)}$$

Por tanto en la ecuación (A.2.1), $ker\delta_i = Cotor^0_\Gamma(M, N^i)$ mientras que $Im\delta_i$ es la imagen de $Cotor^0_\Gamma(M, R^i)$ en $Cotor^0_\Gamma(M, N^{i+1})$ así, usando repetidas veces la ecuación (A.2.2)

$$ker\delta_i / Im\delta_{i-1} = Cotor^1_\Gamma(M, N^{i-1}) = Cotor^i_\Gamma(M, N)$$

Este cociente, por definición, es H^i de (A.2.1) ■

Para otra prueba ver ()

Ahora introducimos una clase de comódulos que satisfacen la condición de *Ext* de (A.2.4) cuando M es proyectivo sobre A.

DEFINICIÓN A.2.5. *Un Γ-comódulo extendido es uno de la forma $\Gamma \otimes_A N$ donde N es un A-módulo. Un Γ-comódulo relativamente inyectivo es un sumando directo de uno extendido.*

LEMA A.2.6. *(a) Si $i : M \longrightarrow N$ es un monomorfismo de comódulos que es split sobre A, entonces cualquier map de M a un comódulo relativamente inyectivo S se extiende a N.*

(b) Si M es proyectivo como un A-módulo y S es un comódulo relativamente inyectivo, entonces $Cotor^i_\Gamma(M, S) = 0$ para $i > 0$ y si $S = \Gamma \otimes_A N$ entonces $Cotor^0_\Gamma(M, S) = M \otimes_A N$

Prueba: (a) Sea $j : N \longrightarrow M$ un spliting de i. Entonces $(\Gamma \otimes f)(\Gamma \otimes j)\psi = g$ es un map de comódulos de N a $\Gamma \otimes_A S$ tal que $gi = \psi f : M \longrightarrow \Gamma \otimes_A S$. Entonces es suficiente mostrar que S es un sumando directo de $\Gamma \otimes_A S$, pues entonces g seguida de la proyección de $\Gamma \otimes_A S$ sobre S será la extensión de f deseada. Por definición S es un sumando directo de $\Gamma \otimes_A T$ para algún A-módulo T. Sea $k : S \longrightarrow \Gamma \otimes_A T$ y $k^{-1} : \Gamma \otimes_A T \longrightarrow S$ spliting maps. Entonces $k^{-1}(\Gamma \otimes \epsilon \otimes T)(\Gamma \otimes k)$ es la proyección de $\Gamma \otimes_A T$ a S.

(b) Se tiene un isomorfismo de $\phi : M \otimes_A N \longrightarrow M \,\square_\Gamma\, (\Gamma \otimes_A N)$ dado por $\phi(m \otimes n) = \psi(m) \otimes n$. Desde que S es un sumando directo de $\Gamma \otimes_A N$, es suficiente reemplazar el último por el anterior. Sea

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \cdots$$

una resolución de N por A-módulos inyectivos. Tomando el producto tensorial con Γ sobre A se obtiene una resolución de $\Gamma \otimes_A N$ por Γ-comódulos inyectivos. $Cotor_\Gamma(M, \Gamma \otimes_A N)$ es la cohomología de la resolución cotensorada con M, el cual es isomorfo a

$$M \otimes_A I^0 \longrightarrow M \otimes_A I^1 \longrightarrow \cdots .$$

Este complejo es acíclico desde que M es proyectivo sobre A. ■

LEMA A.2.7. *(a) Sean*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_{-1}} P^0 \xrightarrow{d_0} P^1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

y

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{d_{-1}} R^0 \xrightarrow{d_0} R^1 \xrightarrow{d_1} \cdots$$

sucesiones exactas largas de Γ-comódulos en el que cada P^i y R^i es relativamente inyectivo y la imagen de cada map es un sumando directo sobre A. Entonces un map de comódulos $f : M \longrightarrow N$ se extiende a un map de sucesiones exactas largas.

(b) Aplicando $L \,\square_\Gamma\, (.)$ (donde L es un Γ-comódulo a derecha proyectivo sobre A) a las dos sucesiones y tomando cohomología obtenemos $Cotor_\Gamma(L, M)$ y $Cotor_\Gamma(L, N)$ respectivamente. El map inducido del anterior al último sólo depende de f.

Prueba: El hecho de que la cohomología es $Cotor$, como se indica en (b), se sigue de **??** y A.2.6(b). La prueba de las otras afirmaciones es similar a aquellas de los resultados análogos sobre resoluciones inyectivas. Definimos los comódulos M^i y N^i de manera inductiva por $M^0 = M$, $N^0 = N$ y M^{i+1} y N^{i+1} son los cocientes en las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow M^i \longrightarrow P^i \longrightarrow M^{i+1} \longrightarrow 0$$

y

$$0 \longrightarrow N^i \longrightarrow R^i \longrightarrow N^{i+1} \longrightarrow 0.$$

Estas sucesiones son split sobre A. Asumimos inductivamente que tenemos un map adecuado de M^i a N^i. Entonces A.2.6(a) nos da $f_i : P^i \longrightarrow R^i$ y este induce un map de M^{i+1} a N^{i+1}, así tenemos (a).

For (b) es suficiente mostrar que el map de sucesiones exactas largas es único salvo homotopía de cadenas, i.e., dado dos colecciones de maps $f_i, f_i' : P^i \longrightarrow R^i$, necesitamos construir $h_i : P^i \longrightarrow R^{i-1}$ (con $h_0 = 0$) tal que $h_{i+1}d_i + d_{i-1}h_i = f_i - f_i'$. Considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & M^i & \xrightarrow{d_{i-1}} & P^i & \xrightarrow{d_i} & M^{i+1} & \longrightarrow 0 \\
& g_{i-1}\downarrow & & g_i \downarrow & & g_{i+1}\downarrow & \\
0 \longrightarrow & N^i & \xrightarrow{d_{i-1}} & R^i & \xrightarrow{d_i} & N^{i+1} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

donde $g_i = f_i - f_i' : P^i \longrightarrow R^i$ y usamos la misma notación para el map inducido en el cociente M^{i+1}. Asumimos de manera inductiva que $h_i : P^i \longrightarrow R^{i-1}$ ha sido construida. Proyectando este sobre N^i obtenemos $h_i : P^i \longrightarrow N^i$ con $h_i d_{i-1} = g_{i-1}$. Ahora queremos un map $\hat{h}_{i+1} : M^{i+1} \longrightarrow R^i$ tal que $\hat{h}_{i+1}d_i = g_i - d_{i-1}h_i$. Por la exactitud de la fila superior, $\hat{h}_{i+1}$ existe si y sólo si $(g_i - d_{i-1}h_i))d_{i-1} = 0$. Pero tenemos $g_i d_{i-1} - d_{i-1}(h_i d_{i-1}) = g_i d_{i-1} - d_i g_{i-1} = 0$, así $\hat{h}_i$ existe. Por A.2.4(a) este se extiende de M^{i+1} a P^{i+1} dándonos el h_{i+1} deseado. ■

Resoluciones del tipo que se muestra en el lema anterior sirven como un substituto para resoluciones inyectivas. Por tanto tenemos

DEFINICIÓN A.2.8. *Una resolución por inyectivos relativos de un comódulo M es una sucesión exacta larga*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R^0 \longrightarrow R^1 \longrightarrow \cdots$$

en el que cada R^i es un relativamente inyectivo y la imagen de cada map es un sumando directo sobre A. Ahora damos un ejemplo de una de estas resoluciones

DEFINICIÓN A.2.9. *Sea M un Γ-comódulo a izquierda. La cobar resolución $D^*_\Gamma(M)$ es definido por $D^s_\Gamma(M) = \Gamma \otimes_A \overline{\Gamma}^{\otimes s} \otimes_A M$ donde $\overline{\Gamma} = ker\varepsilon$, con coborde $d_s D^s_\Gamma(M) \longrightarrow D^{s+1}_\Gamma(M)$ dado por*

$$\begin{array}{rcl}
d_s(\gamma_0 \otimes \gamma_1 \otimes \cdots \gamma_s \otimes m) & = & \sum_{i=0}^{s}(-1)^i \gamma_0 \otimes \cdots \gamma_{i-1} \otimes \Delta(\gamma_i) \otimes \gamma_{i+1} \otimes \cdots m \\
& + & (-1)^{i+1}\gamma_0 \otimes \cdots \gamma_s \otimes \psi(m)
\end{array}$$

para $\gamma_0 \epsilon \Gamma$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \epsilon \overline{\Gamma}$ y $m \epsilon M$. Para un Γ-comódulo a derecha L que es proyectivo sobre A, el cobar complex $C^*_\Gamma(L, M)$ is $L \,\square_\Gamma\, D^*_\Gamma(M)$, así $C^s_\Gamma(L, M) = L \otimes_A \Gamma^{\otimes s} \otimes_A M$, donde $\Gamma^{\otimes s}$ denota el $s - fold$ producto tensorial de Γ sobre A. Siempre que sea posible el subíndice Γ será omitido y $C^*_\Gamma(A, M)$ será abreviado a $C^*_\Gamma(M)$. El elemento $a \otimes \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_n m \epsilon C_\Gamma(L, M)$, donde $a \epsilon L$, será denotado por $a\gamma_1|\gamma_2|\cdots|\gamma_n m$. Si $a = 1$ o $m = 1$, serán omitidos de la notación.

COROLARIO A.2.10. *$H(C^*_\Gamma(L,M)) = Cotor_\Gamma(L,M)$ si L es proyectivo sobre A y $H(C^*_\Gamma(M)) = Ext_\Gamma(A,M)$.*

Prueba: Es suficiente por (A.2.7) mostrar que $D_\Gamma(M) = C_\Gamma(\Gamma, M)$ es una resolución de M por relativamente inyectivos. Es claro que $D^s_\Gamma(M)$ es relativamente inyectivo y que d^s es un map de comódulos. Para probar que $D_\Gamma(M)$ es acíclico usamos una conección homotópico $S : D^s_\Gamma(M) \longrightarrow D^{s-1}_\Gamma(M)$ definido por $S(\gamma\gamma_1|\cdots|\gamma_s m) = \varepsilon(\gamma)\gamma_1\gamma_2|\cdots|\gamma_s m)$ para $s > 0$ y $S(\gamma m) = 0)$. Entonces $Sd + dS$ es la identidad sobre $D^s_\Gamma(M)$ para $s > 0$ y $1 - \phi$ sobre $D^0_\Gamma(M)$, donde $\phi(\gamma m) = \varepsilon(\gamma)m'm''$. Por tanto

$$H^s(D_\Gamma(M)) = \begin{cases} 0 & \text{para } s > 0 \\ Im\phi = M & \text{para } s = 0 \end{cases}$$

■

A.3. Algunas Sucesiones Espectrales

En esta sección describiremos muchas sucesiones espectrales útiles para calcular Ext sobre algebroides de Hopf.

Suponemos que tenemos una sucesión exacta larga de Γ-comódulos

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow R^0 \xrightarrow{d^0} R^1 \xrightarrow{d^1} R^2 \longrightarrow \cdots \qquad \text{(A.3.1)}$$

Sea $S^{i+1} = Imd^i$ y $S^0 = M$, así tenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow S^i \xrightarrow{a^i} R^i \xrightarrow{b^i} S^{i+1} \longrightarrow 0$$

para todo $i \geq 0$. Cada una de estas nos da un homomorfismo de conección.

$$\delta^i : Cotor^{s,t}_\Gamma(L, S^i) \longrightarrow Cotor^{s+1,t}_\Gamma(L, S^{i-1}).$$

Sea $\delta_{(i)} : Cotor^{s,t}_\Gamma(L,S^i) \longrightarrow Cotor^{s+i,t}_\Gamma(L,S^0)$ la composición $\delta^1\delta^2\cdots\delta^i$. Definimos una filtración decreciente sobre $Cotor^{s,*}_\Gamma(L,M)$ por $F^i = Im\delta_{(i)}$ para $i \leq s$, donde $\delta_{(0)}$ es la identidad y $F^i = 0$ para $i \leq 0$.

TEOREMA A.3.1. *Dada una sucesión exacta larga de Γ-comódulos A.3.1 existe una sucesión espectral natural trigraduada (E^{***}_*) (la sucesión espectral de la resolución) tal que*

(a) $E^{n,s,t}_1 = Cotor^{s,t}_\Gamma(L, R^n)$

(b) $d_r : E^{n,s,t}_r \longrightarrow E^{n+r,s-r+1,t}$ *y* d_1 *es el map inducido por* d^* *en A.3.1 y*

(c) $E^{n,s,t}_\infty$ *es el subcociente* F^n/F^{n+1} *de* $Cotor^{n+s,t}_\Gamma(L,M)$ *definido arriba.*

Prueba: Daremos dos construcciones de esta sucesión espectral. Para la primera definimos una pareja exacta (**??**) por

$$\begin{array}{rcl} E_1^{s,t} & = & Cotor_\Gamma^{-t,*}(L, R^s), \\ D_1^{s,t} & = & Cotor_\Gamma^{-t,*}(L, S^s), \end{array}$$

$i = \delta^*$, $j_1 = a^*$ y $k_1 = b^*$. Entonces la sucesión espectral asociada es la que deseamos.

La segunda construcción se aplica cuando L es proyectivo sobre A y es más explícita y útil en la práctica. ∎

COROLARIO A.3.2. *La cohomología*

En seguida se discuten sucesiones espectrales que surgen de filtraciones crecientes y decrecientes de Γ.

DEFINICIÓN A.3.3. *Una filtración creciente sobre un algebroide de Hopf* (A, Γ) *es una sucesión creciente de sub-*K*-módulos*

$$K = F_0\Gamma \subset F_1\Gamma \subset F_2\Gamma \subset \cdots$$

con $\Gamma = \bigcup F_s\Gamma$ *tal que*

(a) $F_s\Gamma.F_t\Gamma \subset F_{s+t}\Gamma$

(b) $c(F_s\Gamma) \subset F_s\Gamma$ *y*

(c) $\Delta F_s\Gamma \subset \bigoplus_{p+q=s} F_p\Gamma \otimes_A F_q\Gamma$.

Una filtración decreciente sobre (A, Γ) es una sucesión decreciente de sub-K-módulos

$$\Gamma = F^0\Gamma \supset F^1\Gamma \supset F^2\Gamma \supset \cdots$$

con $0 = \bigcap F^s\Gamma$ tal que condiciones similares a (a), (b) y (c) de arriba (con los signos de inclusión invertidos) son safisfechas. Un algebroide de Hopf filtrado (A, Γ) es uno dotado de una filtración. Notar que una filtración sobre Γ induce una sobre A, por ejemplo,

$$F_sA = \eta_L(A) \cap F_s\Gamma = \eta_R(A) \cap F_s\Gamma = \varepsilon(F_s\Gamma).$$

DEFINICIÓN A.3.4. *Sea* (A, Γ) *uno filtrado como en arriba. El objeto graduado asociado* $E^0\Delta$ *(o* $E_0\Gamma$ *) es definido por*

$$E_s^0\Gamma = F_s\Gamma / F_{s-1}\Gamma$$

o

$$E_0^s\Gamma = F^s\Gamma / F^{s-1}\Gamma.$$

El objeto graduado E_*^0A (o E_0^*A) es definido de manera similar.

DEFINICIÓN A.3.5. *Sea M un Γ-comódulo. Una filtración creciente sobre M es una sucesión creciente de sub-K-módulos*

$$0 = F_1 M \subset F_2 M \subset \cdots$$

tal que $M = \bigcup F_s M$, $F_s A.F_t M \subset F_{s+t} M$ y

$$\psi(F_s M) \subset \bigoplus_{p+q=s} F_p \Gamma \otimes F_q M.$$

Una filtración decreciente sobre M es definido de manera similar, así como el objeto graduado asociado E^0_* o E^*_0. Un comódulo filtrado M es un comódulo equipado con una filtración.

PROPOSICIÓN A.3.6. $(E^0 A, E^0 \Gamma)$ *o* $(E_0 A, E_0 \Gamma)$ *es un algebroide de Hopf graduado y $E^0 M$ o $E_0 M$ es un comódulo sobre este.* ■

Notar que si (A, Γ) y M son graduados, entonces $(E^0 A, E^0 \Gamma)$ y $E^0 M$ son bigraduados.

Asumimos de ahora en adelante que $E^0 \Gamma$ o $E_0 \Gamma$ es flat sobre $E^0 A$ o $E_0 A$.

TEOREMA A.3.7. *Sean L y M comódulos filtrados a derecha y a izquierda, respectivamente, sobre un algebroide de Hopf filtrado (A, Γ). Entonces existe una sucesión espectral natural convergiendo a $Cotor_\Gamma(L, M)$ tal que*

(a) En el caso creciente

$$E_1^{s,*} = Cotor^s_{E^0\Gamma}(E^0 L, E^0 M)$$

donde la segunda graduación viene de la filtración y

$$d_r : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+1,t-r}$$

(b) En el caso decreciente

$$E_1^{s,*} = Cotor^s_{E_0\Gamma}(E_0 L, E_0 M)$$

y

$$d_r : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+1,t+r}.$$

Prueba: Las filtraciones sobre Γ y M inducen uno sobre el cobar complex $C_\Gamma(M)$ y tenemos $E_0 C_\Gamma(L, M) = C_{E_0\Gamma}(E_0 L, E_0 M)$ o $E^0 C_\Gamma(L, M) = C_{E^0\Gamma}(E^0 L, E^0 M)$. La sucesión espectral asociada es la que se busca.■

Ahora vamos a tratar la sucesión espectral asociada a un map de algebroides de Hopf.

TEOREMA A.3.8. *Sea $f : (A,\Gamma) \longrightarrow (B,\Sigma)$ un map de algebroides de Hopf, M un Γ-comódulo a derecha y N un Σ-comódulo a izquierda.*

(a) $C_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N)$ es un complex de Γ-comódulos a izquierda, así $Cotor_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N)$ es un Γ-comódulo a izquierda.

(b) Si M es flat sobre A, existe una sucesión espectral natural convergiendo a $Cotor_\Sigma(M \otimes_A B, N)$ con

$$E_2^{s,t} = Cotor_\Gamma^s(M, Cotor_\Sigma^t(\Gamma \otimes_A B, N))$$

y $d_r : E_r^{s,t} \longrightarrow E_r^{s+r,t-r+1}$.

(c) Si N es un comódulo álgebra, entonces también es $Cotor_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N)$. Si M es también un comódulo algebra, entonces la sucesión espectral es una de álgebras.

Prueba: Por (a) tenemos $C_\Sigma^s(\Gamma \otimes_A B) = \Gamma \otimes_A \overline{\Sigma}^{\otimes s} \otimes_B N$ con coborde d_s como se da en A.2.9. Debemos probar que d_s conmuta con el producto sobre Γ. Para todos los términos excepto para el primero en la fórmula para d_s, esta conmutatividad es clara. Para el primer término consideramos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\Gamma & \xrightarrow{\Delta} & \Gamma \otimes_A \Gamma & \xrightarrow{\Gamma \otimes F} & \Gamma \otimes_A \Sigma \\
\Big\downarrow \Delta & & \Big\downarrow \Delta \otimes \Gamma & & \Big\downarrow \Delta \otimes \Sigma \\
\Gamma \otimes_A \Gamma & \xrightarrow{\Gamma \otimes \Delta} & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A \Gamma & \xrightarrow{\Gamma \otimes \Gamma \otimes f} & \Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A \Sigma
\end{array}$$

El cuadrado del lado izquierdo conmuta por coasociatividad y el otro conmuta de manera trivial. La fila superior tensorada sobre B con $\Sigma^{\otimes s} \otimes_B N$ es el primer término en d_s. Por tanto la conmutatividad del diagrama muestra que d_s es un map de Γ-comódulos a izquierda.

Para (b) consideramos el complejo doble

$$C_\Gamma^*(M, C_\Sigma^*(\Gamma \otimes_A B, N))$$

que está bien definido por (a). Comparamos la sucesión espectral obtenida filtrando por dos graduaciones. La filtración de la primera nos da

$$E_1 = C_\Gamma^*(M, Cotor_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N))$$

así

$$E_2 = Cotor_\Gamma(M, Cotor_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N))$$

que es la sucesión espectral deseada. Filtrando por la segunda graduación obtenemos una sucesión espectral con

$$\begin{aligned}
E_1^{s,t} &= Cotor_\Gamma^s(M, C_\Sigma^t(\Gamma \otimes_A B, N)) \\
&= Cotor_\Gamma(M, \Gamma \otimes_A \overline{\Sigma}^{\otimes t} \otimes_B N) \\
&= M \otimes_A \overline{\Sigma}^{\otimes t} \otimes_B N \text{ por } (b) \\
&= C_\Sigma^t(M \otimes_A B, N)
\end{aligned}$$

así $E_2 = E_\infty = Cotor_\Sigma(M \otimes_A B, N)$.

Para (c) notar que $\Gamma \otimes_A B$ al igual que N es un Σ-comódulo álgebra. La Γ-coacción sobre $C_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N)$ es inducida por el map

$$\begin{aligned}
C(\Delta \otimes B, N) : C_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N) &\longrightarrow C_\Sigma(\Gamma \otimes_A \Gamma \otimes_A B, N) \\
&= \Gamma \otimes_A C_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N).
\end{aligned}$$

Puesto que la estructura de álgebra sobre $C_\Sigma(,)$ es funtorial, $C(\Delta \otimes B, N)$ induce un map de álgebras en cohomología y $Cotor_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N)$ es un Γ-comódulo álgebra.

Para probar que tenemos una sucesión espectral de álgebras debemos definir una estructura de álgebra sobre el complejo doble utilizado en la prueba de (b), el cual es $M \,\Box_\Gamma\, D_\Gamma(\Gamma \otimes_A B \,\Box_\Sigma\, D_\Sigma(N))$. Sea $\widetilde{N} = \Gamma \otimes_A B \,\Box_\Sigma\, D_\Sigma(N)$. Ya hemos visto que este es un Γ-comódulo álgebra. Entonces esta estructura de álgebra se extiende sobre $D_\Gamma(\widetilde{N})$ por A.2.7 desde que $D_\Gamma(\widetilde{N}) \otimes_A D_\Gamma(\widetilde{N})$ es una resolución relativamente inyectiva de $\widetilde{N} \otimes \widetilde{N}$. Por tanto tenemos

$$\begin{aligned}
M \,\Box_\Gamma\, D_\Gamma(\widetilde{N}) \otimes M \,\Box_\Gamma\, D_\Gamma(\widetilde{N}) &\longrightarrow M \otimes_A M \,\Box_\Gamma\, D_\Gamma(\widetilde{N}) \otimes_A D_\Gamma(\widetilde{N}) \\
&\longrightarrow M \,\Box_\Gamma\, D_\Gamma(\widetilde{N}) \otimes_A D_\Gamma(\widetilde{N}) \\
&\longrightarrow M \,\Box_\Gamma\, D_\Gamma(\widetilde{N}),
\end{aligned}$$

que es la estructura de álgerbra deseada. ■

Nuestra primera aplicación de esta sucesión espectral es un isomorfismo de cambio de anillos que ocurre cuando esta converge.

TEOREMA A.3.9 (Isomorfismo de cambio de anillos)**.** *Sea $f : (A, \Gamma) \longrightarrow (B, \Sigma)$ un map de algebroides de Hopf conexos graduados que satisface las hipótesis de A.1.20; sea M un Γ-comódulo a derecha y sea N un Σ-comódulo a izquierda que es flat sobre B. Entonces*

$$Cotor_\Gamma(M, (\Gamma \otimes_A B) \,\Box_\Sigma\, N) = Cotor_\Sigma(M \otimes_A B, N)$$

En particular

$$Ext_\Gamma(A, (\Gamma \otimes_A B) \,\Box_\Sigma\, N) = Ext_\Sigma(B, N).$$

Prueba: Por A.1.20 y A.2.6(b) tenemos

$$Cotor^s_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N) = 0 \text{ para } s > 0.$$

A.3.8(b) nos da

$$Cotor_\Gamma(M, Cotor^0_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N)) = Cotor_\Sigma(M \otimes_A B, N).$$

Desde N es flat sobre B,

$$Cotor^0_\Sigma(\Gamma \otimes_A B, N) = (\Gamma \otimes_A B) \,\square_\Gamma\, N$$

y se tiene el resultado. ■

COROLARIO A.3.10. *Sea K un campo y $f : (K, \Gamma) \longrightarrow (K, \Sigma)$ y map suryectivo de algebroides de Hopf. Si N es un Σ-comódulo a izquierda, entonces*

$$Ext_\Gamma(K, \Gamma \,\square_\Sigma\, N) = Ext_\Sigma(K, N).$$

■

Bibliografía

[1] J.F. Adams, Stable Homotopy and Generalized Homology, Univ. of Chicago Press, Illinois and London, 1974.

[2] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.

[3] P.E. Conner and E.E. Folyd, The Relation of Cobordism to K-Theories, Springer-Verlag, 1966.

[4] P.E. Conner and E.E. Folyd, Diferential Periodic Maps, Springer-Verlag, 1964.

[5] S. Eilenberg and N.E. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.

[6] E.L. Lima, Duality and Potnikov invariants, Thesis, University of Chicago, Chicago, 1958.

[7] W.S. Massey, Exact Couples in algebraic topology, Ann. of Math.56(1952), 363-396.

[8] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, 1997.

[9] J.W. Milnor, The Steenrod Algebra and its dual, Ann. of Math.67(1958), 150-171.

[10] J.W. Milnor, On the Cobordism ring Ω^* and a complex analogue, Amer.J.Math.67(1960), 505-521.

[11] J.W. Milnor and J.C. Moore, On the structure of Hopf Algebra, Ann. of math.67(1965), 211-264.

[12] S.P. Novikov, Some problems in the topology of manifolds connected with the theory of Thom spaces, Duk1. Akad. Nauk. SSSU. 132(1960), 1031-1034(Russian)

[13] S.P. Novikov, Homotopy properties of Thom complexes, Mat. Sb. (N.S.)57 (99)(1962), 407-442.

[14] F. Peterson, Generalized Homology Groups, American Journal of Mathematics, vol.78 (1956), pp. 259-281.

[15] D. Quillen, Elementary Proofs of Some Results of Cobordism Theory Using Steenrod Operations, Advances in Mathematics, Massachusetts Institute Technology, Cambridge (1971), 29-56.

[16] D.C. Ravenel, Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres, Univ. of Rochester, Rochester New York, 2003.

[17] P. Schapira, Categories and Homological Algebra, Paris VI University, 2003/2004.

[18] E.H. Spanier, Algebraic Topology, McGraw-Hill, New York, 1966.

[19] N.E. Steenrod and D.B.A. Epstein, Cohomology Operations, Ann. of Math.Studies,n 50, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[20] R.E. Stong, Notes on Cobordism Theory, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1968.

[21] G.W. Whitehead, Generalized Homology Theories, Trans. Amer. Math. Soc. 102(1962) 227-283.